

Du hast **Feedback** zum Kurs?  
Wir freuen uns, von dir zu hören!  
Schreib uns einfach an:

[info@studyhelp.de](mailto:info@studyhelp.de)

Mitentwickelt und  
empfohlen von

*Daniel Jung*



# Mathe Abitur Intensivkurs

Kursbuch



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b><u>FUNKTIONEN</u></b>	<b>7</b>
1.1	GRUNDFUNKTIONEN	7
1.2	DIE DREI HÄUFIGSTEN TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN	9
1.3	MANIPULATION VON GRUNDFUNKTIONEN	10
1.4	UMKEHRFUNKTION	11
1.5	WAS IST IN DER FUNKTION GEGEBEN?	13
1.6	AUFGABEN	14
<b>2</b>	<b><u>GLEICHUNGEN LÖSEN</u></b>	<b>15</b>
2.1	TECHNIKEN	15
2.2	AUFGABEN	19
<b>3</b>	<b><u>ABLEITUNG</u></b>	<b>20</b>
3.1	ABLEITUNG ALLGEMEIN	20
3.2	ABLEITUNGSREGELN	22
3.3	AUFGABEN	24
<b>4</b>	<b><u>SEKANTE, TANGENTE UND NORMALE</u></b>	<b>26</b>
4.1	SEKANTENGLEICHUNG AUFSTELLEN:	26
4.2	TANGENTENGLEICHUNG AUFSTELLEN	26
4.3	NORMALE, SENKRECHTE BZW. ORTHOGONALE AUFSTELLEN	27
4.4	AUFGABEN	28
<b>5</b>	<b><u>KURVENDISKUSSION:</u></b>	<b>29</b>
5.1	GRENZVERHALTEN ( <i>LIMES</i> ):	29
5.2	SYMMETRIE	30
5.3	ACHSENABSCHNITTE:	31
5.4	DEFINITIONS- UND WERTEBEREICH:	32
5.5	EXTREMPUNKTE	33
5.6	WENDESTELLE	34
5.7	MONOTONIE	35
5.8	KRÜMMUNG	35
5.9	AUFGABEN	35
<b>6</b>	<b><u>LGS LÖSEN:</u></b>	<b>37</b>
6.1	LÖSUNGSSTRATEGIEN	37
6.2	GAUß ALGORITHMUS	38
6.3	AUFGABEN	40
<b>7</b>	<b><u>MODELLIERUNGSAUFGABEN</u></b>	<b>41</b>
7.1	STECKBRIEFAUFGABEN	41
7.2	TRASSIERUNGSAUFGABEN	41
7.3	AUFGABEN	42

<b>8</b>	<b><u>EXTREMWERTPROBLEME</u></b>	<b>43</b>
8.1	LÖSUNGSSTRATEGIE	43
8.2	AUFGABEN	44
<b>9</b>	<b><u>WACHSTUMSPROZESSE</u></b>	<b>45</b>
9.1	LINEARES UND EXPONENTIELLES WACHSTUM	45
9.2	AUFGABEN	48
<b>10</b>	<b><u>INTEGRALRECHNUNG</u></b>	<b>49</b>
10.1	GRUNDLAGEN	49
10.2	ÜBERSICHT ÜBER TYPISCHE STAMMFUNKTIONEN	50
10.3	UNBESTIMMTES INTEGRAL	51
10.4	BESTIMMTES INTEGRAL	51
10.5	BESTIMMUNG VON FLÄCHENINHALTEN	52
10.6	PRODUKTINTEGRATION (PARTIELLE INTEGRATION) UND INTEGRATION DURCH SUBSTITUTION	53
10.7	MITTELWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG	55
10.8	ROTATIONSKÖRPER	56
10.9	ZUSATZ	57
10.10	AUFGABEN	59
<b>11</b>	<b><u>SCHARFUNKTIONEN</u></b>	<b>60</b>
11.1	ZUSAMMENHÄNGE	60
11.2	AUFGABEN	61
<b>12</b>	<b><u>SPECIALS</u></b>	<b>62</b>
12.1	RATIONALE FUNKTIONEN (BRUCHFUNKTIONEN)	62
12.2	GERADEN MIT BESONDERER LAGE	62
12.3	MEHRFACHE NULLSTELLEN	63
12.4	STÜCKWEISE DEFINIERTE FUNKTION	63
12.5	ABSTAND VON ZWEI PUNKTEN	63
12.6	SENKRECHTER ABSTAND	64
12.7	SCHNITTWINKEL ZWISCHEN EINER GERADE UND DER X-ACHSE	64
12.8	WINKEL ZWISCHEN ZWEI GERADEN	64
<b>13</b>	<b><u>AUFGABEN AUF ABITURNIVEAU</u></b>	<b>65</b>
<b>14</b>	<b><u>VEKTOREN</u></b>	<b>68</b>
14.1	PUNKTE UND VEKTOREN IM KOORDINATENSYSTEM	68
14.2	ADDITION UND SUBTRAKTION VON VEKTOREN	70
14.3	S-MULTIPLIKATION	71
14.4	BETRAG EINES VEKTORS	71
14.5	LINEARE ABHÄNGIGKEIT UND UNABHÄNGIGKEIT VON VEKTOREN	72
14.6	DAS SKALARPRODUKT	73
14.7	DAS KREUZPRODUKT/VEKTORPRODUKT	74
14.8	DAS SPATPRODUKT	76
14.9	AUFGABEN	78
<b>15</b>	<b><u>GERADEN</u></b>	<b>80</b>

15.1	AUFGABEN .....	81
<b>16</b>	<b><u>EBENEN.....</u></b>	<b>82</b>
16.1	DARSTELLUNGSFORMEN DER EBENENGLEICHUNG .....	82
16.2	AUFSTELLEN DER EBENENGLEICHUNG IN PARAMETERFORM.....	86
16.3	UMWANDELN VON EBENENGLEICHUNGEN .....	91
16.4	AUFGABEN .....	95
<b>17</b>	<b><u>LAGEBEZIEHUNGEN.....</u></b>	<b>96</b>
17.1	LAGE: PUNKT – GERADE .....	96
17.2	LAGE: PUNKT – EBENE.....	97
17.3	LAGE: GERADE – GERADE.....	98
17.4	LAGE: GERADE – EBENE.....	99
17.5	LAGE: EBENE – EBENE.....	100
17.6	SCHNITTWINKEL .....	103
17.7	SPURPUNKTE UND SPURGERADEN .....	105
17.8	AUFGABEN .....	108
<b>18</b>	<b><u>ABSTANDSBERECHNUNG.....</u></b>	<b>110</b>
18.1	ABSTAND: PUNKT – PUNKT.....	110
18.2	ABSTAND: PUNKT – GERADE.....	110
18.3	ABSTAND: GERADE – GERADE.....	112
18.4	ABSTAND: PUNKT – EBENE.....	115
18.5	ABSTAND: GERADE – EBENE.....	116
18.6	ABSTAND: EBENE – EBENE .....	116
18.7	AUFGABEN .....	117
<b>19</b>	<b><u>PROJEKTIONEN UND SPIEGELUNGEN.....</u></b>	<b>118</b>
19.1	SPIEGELUNG AN EINEN PUNKT.....	118
19.2	SPIEGELUNG AN EINER GERADEN .....	118
19.3	SPIEGELUNG AN EINER EBENE.....	119
19.4	PROJEKTIONEN .....	122
19.5	AUFGABEN .....	124
<b>20</b>	<b><u>KREISE UND KUGELN.....</u></b>	<b>125</b>
20.1	KREISGLEICHUNG UND KUGELGLEICHUNG .....	125
20.2	LAGEBEZIEHUNGEN UND ABSTAND.....	126
20.3	AUFGABEN .....	131
<b>21</b>	<b><u>LINEARE ALGEBRA: GRUNDLAGEN.....</u></b>	<b>132</b>
21.1	MATRIZEN.....	132
21.2	RECHNEN MIT MATRIZEN .....	133
21.3	VOM LGS ZUR MATRIX.....	134
21.4	AUFGABEN .....	135
<b>22</b>	<b><u>AUSTAUSCHPROZESSE.....</u></b>	<b>136</b>
22.1	VORHERSAGEN.....	137
22.2	ZEITLICH RÜCKWÄRTSRECHNEN (MIT LGS ODER INVERSE).....	138

22.3	AUFGABEN .....	140
<b>23</b>	<b><u>POPULATIONSPROZESSE .....</u></b>	<b>141</b>
23.1	SONDERFALL: ZYKLUS BEI POPULATIONEN.....	141
23.2	AUFGABEN .....	142
<b>24</b>	<b><u>PRODUKTIONSPROZESSE .....</u></b>	<b>143</b>
24.1	DAS 1-SCHRITT-VERFLECHTUNGSMODELL .....	143
24.2	EINFACHE MEHRSCHRITT-MODELLE.....	143
24.3	AUFGABEN .....	144
<b>25</b>	<b><u>AFFINE ABBILDUNGEN .....</u></b>	<b>145</b>
25.1	SPIEGELUNGEN .....	145
25.2	PROJEKTIONEN .....	146
25.3	DREHUNG UM DEN URSPRUNG .....	147
25.4	PUNKTE UND GERADEN ABBILDEN .....	147
25.5	FIXPUNKT UND FIXPUNKTGERADE BESTIMMEN.....	148
25.6	FIXPUNKTGERADE BESTIMMEN .....	148
25.7	FIXGERADEN BESTIMMEN.....	149
25.8	VERKETTUNG VON ABBILDUNGEN .....	149
25.9	ABBILDUNGSGLEICHUNG BESTIMMEN .....	150
25.10	AUFGABEN .....	150
<b>26</b>	<b><u>AUFGABEN AUF ABITURNIVEAU .....</u></b>	<b>152</b>
26.1	AUFGABE: ONLINE-HÄNDLER .....	152
26.2	AUFGABE: FÖRSTER.....	153
<b>27</b>	<b><u>GRUNDLAGEN.....</u></b>	<b>154</b>
27.1	GRUNDLEGENDE BEGRIFFE UND DIE WAHRSCHEINLICHKEIT NACH LAPLACE .....	154
27.2	WAHRSCHEINLICHKEITEN NACH LAPLACE .....	155
<b>28</b>	<b><u>BAUMDIAGRAMME.....</u></b>	<b>156</b>
28.1	MIT ODER OHNE ZURÜCKLEGEN?.....	156
28.2	PFADREGELN .....	157
28.3	AUFGABEN .....	158
<b>29</b>	<b><u>KOMBINATORIK .....</u></b>	<b>159</b>
29.1	GRUNDLAGEN .....	159
29.2	BEISPIELE .....	160
29.3	AUFGABEN .....	161
<b>30</b>	<b><u>BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN .....</u></b>	<b>162</b>
30.1	GRUNDLAGEN .....	162
30.2	VIERFELDERTAFEL.....	163
30.3	AUFGABEN .....	165
<b>31</b>	<b><u>DISKRETE VERTEILUNGEN.....</u></b>	<b>165</b>

31.1	GRUNDLAGEN .....	165
31.2	WAHRSCHEINLICHKEITSFUNKTIONEN UND VERTEILUNGSFUNKTION .....	166
31.3	PARAMETER DISKRETER VERTEILUNGEN .....	168
31.4	BERNOULLIVERTILUNG .....	170
31.5	BINOMIALVERTEILUNG .....	171
31.6	HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG .....	174
31.7	AUFGABEN .....	175
31.8	ZUSAMMENFASSUNG .....	176
<b>32</b>	<b>STETIGE VERTEILUNGEN .....</b>	<b>177</b>
32.1	GRUNDLAGEN .....	177
32.2	NORMALVERTEILUNG .....	180
32.3	APPROXIMATION DER BINOMIALVERTEILUNG DURCH DIE NORMALVERTEILUNG .....	182
32.4	AUFGABEN .....	183
<b>33</b>	<b>HYPOTHESEN TESTEN .....</b>	<b>184</b>
33.1	GRUNDLAGEN .....	184
33.2	TESTEN MIT HILFE DER NORMALVERTEILUNG .....	187
33.3	AUFGABEN .....	189
33.4	WICHTIGE FORMELN IM ÜBERBLICK .....	190
<b>34</b>	<b>PRÜFUNGSIMULATION .....</b>	<b>192</b>
34.1	PFLICHTTEIL .....	192
34.2	WAHLTEIL ANALYSIS .....	194
34.3	WAHLTEIL LINEARE ALGEBRA .....	195
34.4	WAHLTEIL STOCHASTIK .....	196

**Liebe Kursteilnehmerin, lieber Kursteilnehmer,**

wir freuen uns, dass du dich für unseren Mathe ABI Intensivkurs entschieden hast und bedanken uns für dein Vertrauen.

In unserem Intensivkurs möchten wir dich bestmöglich auf deine anstehende Abiturprüfung im Fach Mathematik vorbereiten.

Heute erhältst du dein exklusives Kursbuch. Wir bitten dich, dieses zu allen Kurstagen mitzubringen. Das Kursbuch umfasst nahezu alle Themen, die in ganz Deutschland im Abitur zur Anwendung kommen können. Lass dich von der Themenvielfalt nicht erschrecken - im Kurs werden wir selbstverständlich nur die für dein Bundesland relevanten Inhalte behandeln.

Wir wünschen dir viel Erfolg und Spaß beim Mathe ABI Intensivkurs.

Bei Fragen rund um unser Angebot erreichst du uns jederzeit per E-Mail ([info@studyhelp.de](mailto:info@studyhelp.de)) oder gerne auch telefonisch unter 05251-5399606.

Viele Grüße

**Dein StudyHelp - Team**

## 2 Gleichungen lösen

### 2.1 Techniken

Zur Bestimmung von  $x$  gibt es einige Standardtechniken, die man beherrschen muss.

1. Umformen: Wenn  $x^1$  die höchste Potenz ist

$$\begin{array}{rcl} 2x - 8 = 0 & | + 8 \\ \Leftrightarrow 2x = 8 & | : 2 \\ \Leftrightarrow x = 4 & \end{array}$$

2. Umformen/Wurzel: Wenn es kein  $x$ , sondern nur  $x^2$  gibt:

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 - 8 = 0 & | + 8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 = 8 & | : 2 \\ \Leftrightarrow x^2 = 4 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x = \pm 2 & \end{array}$$

Merke: Die Gleichung  $x^2 = a$  hat für

- $a > 0$  die beiden Lösungen  $x = \pm\sqrt{a}$
- $a = 0$  die einzige Lösung  $x = 0$
- $a < 0$  keine Lösung, denn aus einem negativen Radikand (das, was unter der Wurzel steht), darf keine Wurzel mit geradem Wurzelexponent gezogen werden

3. Ausklammern: Wenn eine Seite Null ist und sonst nur Terme mit  $x$  auftreten

$$\begin{array}{rcl} x^3 - \frac{1}{4}x^5 = 0 & | x^3 \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow \underbrace{x^3}_{\text{Faktor}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}_{\text{Faktor}} = 0 & \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Produkt}} & \end{array}$$

Merke: Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist!

$$\begin{array}{rcl} x^3 = 0 & \text{oder} & \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = 0 & & \Leftrightarrow x_2 = 2 \text{ und } x_3 = -2 \end{array}$$



4. pq-Formel: Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$

Direkte Lösung:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

5. abc-Formel („Mitternachtsformel“): Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$

Direkte Lösung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

6. Substitution: Gleichung mit 2 Exponenten, die das doppelte voneinander sind:

**Beispiel:**

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

Substitution:  $z = x^2$

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \underbrace{z^2 - 2z - 8 = 0}_{\text{Quadratische Gleichung}}$$

Gleichung mit pq-Formel lösen:

$$z_1 = 4 \quad \text{und} \quad z_2 = -2$$

Resubstitution/Rücksubstitution:  $z = x^2$

$$z_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

$$z_2 = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Lösungen:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

Merke: Bei vorgegebenem Intervall  $[a, b]$  immer  $f(a)$  und  $f(b)$  mit einbeziehen!

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x$  mit  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ :

1. Ableitungen:  $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$  und  $f''(x) = 4x + 6$
2. Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$  und  $x_2 = -1$
3. Hinreichende Bedingung:
  - a.  $f''(-2) = 4 \cdot (-2) + 6 = -2 \Rightarrow$  Hochpunkt an der Stelle  $x = -2$
  - b.  $f''(-1) = 4 \cdot (-1) + 6 = 2 \Rightarrow$  Tiefpunkt an der Stelle  $x = -1$

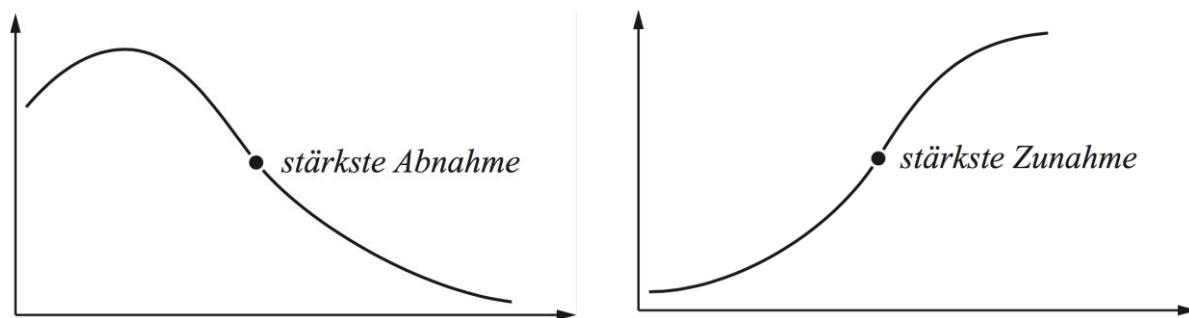
4. y-Werte:

$$y = f(-2) = -4/3 \text{ und } y = f(-1) = -5/3$$

Die Funktion besitzt einen Hochpunkt  $HP\left(-2 \mid -\frac{4}{3}\right)$  und einen Tiefpunkt  $TP\left(-1 \mid -\frac{5}{3}\right)$ .

## 5.6 Wendestelle

Erinnerung: Wendestelle „=“ Stelle, an der sich die Krümmung ändert und meist Punkt mit kleinster/größter Änderungsrate (Wichtig für Textaufgaben!)



**Gesucht:** Wendestellen  $x_W$  bzw. Wendepunkte  $W = (x_W \mid f(x_W))$

**Vorgehen:**

5.  $f''(x)$  und  $f'''(x)$  bestimmen
6. Notwendige Bedingung:  $f''(x) = 0 \Rightarrow$  Suche alle  $x_W$ , welche diese Bedingung erfüllen
7. Hinreichende Bedingung:  $f''(x) = 0$  (schon erfüllt) und  $f'''(x) \neq 0$   
Setze alle  $x_W$  in  $f'''(x)$  ein und prüfe die Bedingung.
8. Berechne y-Werte: Setze  $x_W$  in die Funktion  $f(x)$  ein, um die Punkte  $W(x_W \mid f(x_W))$  zu erhalten.

In Anwendungsaufgaben:

- Beschreibt  $f(x)$  eine Menge, dann sind die Wendepunkte die stärkste Zu-/Abnahme der Menge
- Beschreibt  $f(x)$  bereits eine Änderungsrate (z.B. Geschwindigkeit), dann ist die größte/kleinste Geschwindigkeit ein  $HP/TP$

## 10 Integralrechnung

1. **Bisher:** Ableitungen berechnet  $\Rightarrow$  Information über die Steigung einer Funktion (Textaufgabe: Änderungsrate)  $\Rightarrow$  Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten
2. Integrale:
  - Anschaulich: Berechnung des Flächeninhaltes unter einer Funktion (Vorsicht: mit Vorzeichen)
  - Anwendung: Aus Änderungsrate wird die sich ändernde Größe ermittelt (Bsp.: aus der Geschwindigkeit in km/h der zurückgelegte Weg)
  - Bestimmte Integrale (Integrale mit Grenzen)  $\int_a^b f(x)dx$  oder unbestimmte Integrale (ohne Grenzen)  $\int f(x)dx$

### 10.1 Grundlagen

Bestimmung von Integralen über die **Integration** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) für stetige Funktionen  $f$ :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) ; \text{ mit einer Stammfunktion } F \text{ in } f \text{ in } [a, b]$$

- Definition:  $F$  ist eine **Stammfunktion** von  $f$  in einem Intervall  $J$ , wenn
 
$$F'(x) = f(x), \text{ für alle } x \text{ aus } J$$
- Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist es auch  $F + c$  mit beliebiger Konstante  $c$ . Daher immer nur von **einer** Stammfunktion sprechen, wenn das **c** nicht mit angegeben wird!

$$\begin{array}{c}
 F(x) \\
 \uparrow \\
 F'(x) = f(x) \\
 \downarrow \\
 f'(x) \\
 \downarrow \\
 f''(x)
 \end{array}$$

Wie beim Ableiten gibt es auch beim Integrieren/Stammfunktion bilden Regeln:

1. *Summenregel* (jeder Summand wird einzeln integriert)
2. *Faktorregel* (ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten)
3. *Produktintegration* (partielle Integration)  $\rightarrow$  folgt später noch
4. *Integration durch Substitution*  $\rightarrow$  folgt später noch