Abiturprüfung 2011

Mathematik

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt aus den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus.

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe I

BE	Teil 1
4	**1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Geben Sie D an und ermitteln Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für die Ableitung f' von f.
5	**2** Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f: x \mapsto x \cdot \ln x$ ist. Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.
5	**3** Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von 6,1 Milliarden zu Beginn des Jahres 2000 auf 6,9 Milliarden zu Beginn des Jahres 2010. Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot (x-2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist. Bestimmen Sie N_0 und k.
	4 Betrachtet wird die Aussage $\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = 0$.
3	**a)** Machen Sie ohne Rechnung anhand einer sorgfältigen Skizze plausibel, dass die Aussage wahr ist.
3	**b)** Weisen Sie mithilfe einer Stammfunktion die Gültigkeit der Aussage durch Rechnung nach.
20	

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	**Teil 2**

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x+3}$ mit Definitionsmenge D_f. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f, einen beliebigen Punkt $Q(x\,|\,f(x))$ auf G_f sowie den Punkt $P(1{,}5\,|\,0)$ auf der x-Achse.

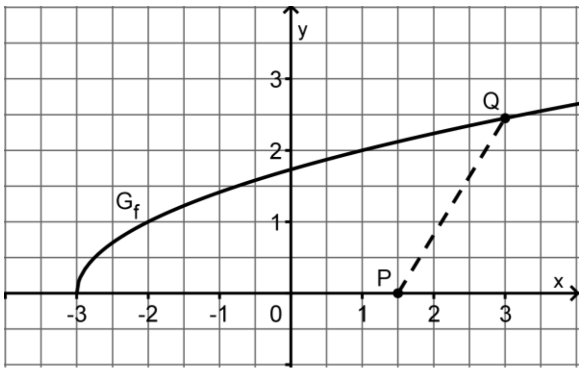


Abb. 1

2 **a)** Begründen Sie, dass $D_f = [-3; +\infty[$ die maximale Definitionsmenge von f ist. Wie geht G_f aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervor?

4 **b)** Zeigen Sie, dass für die Entfernung $d(x)$ des Punkts $Q(x\,|\,f(x))$ vom Punkt $P(1{,}5\,|\,0)$ gilt: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5{,}25}$.

7 **c)** Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten desjenigen Graphenpunkts $Q_E(x_E\,|\,y_E)$, der von P den kleinsten Abstand hat. Tragen Sie Q_E in Abbildung 1 ein.

(zur Kontrolle: $x_E = 1$)

5 **d)** Weisen Sie nach, dass die Verbindungsstrecke $[PQ_E]$ und die Tangente an G_f im Punkt Q_E senkrecht zueinander sind.

6 **e)** Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, der x-Achse und der Strecke $[PQ_E]$ begrenzt wird.

2 Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion g mit folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion g hat in $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel;
- G_g verläuft stets oberhalb seiner schrägen Asymptote, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ gegeben ist;
- die einzige Nullstelle von g ist $x = -1$.

(Fortsetzung nächste Seite)

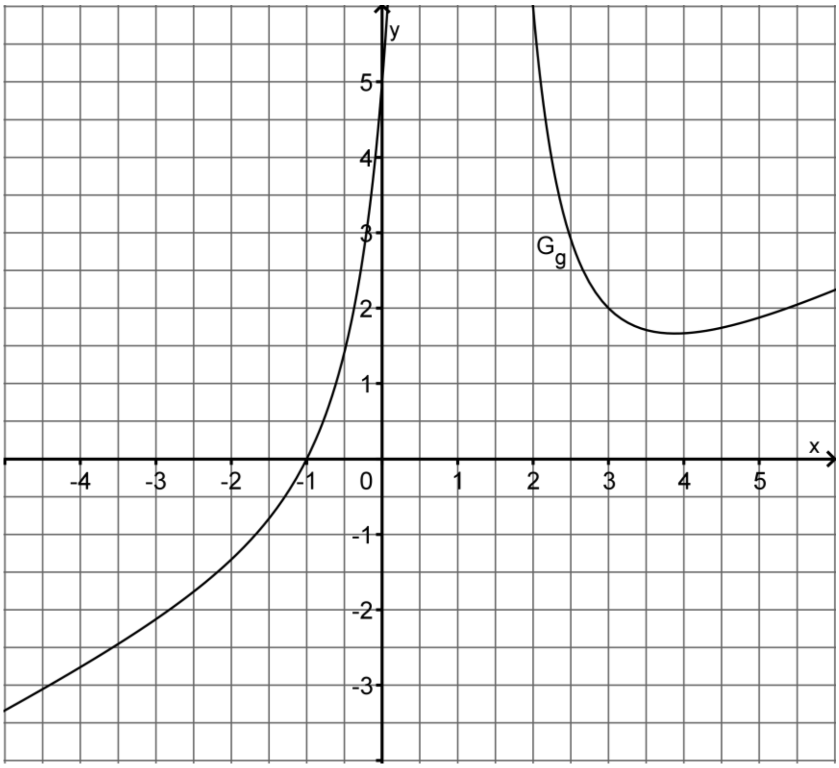


Abb. 2

6 **a)** Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 näherungsweise den Wert der Ableitung g' von g an der Stelle $x = -1$; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.
Aus der Gleichung der schrägen Asymptote ergibt sich unmittelbar das Verhalten der Ableitung g' für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie dieses Verhalten an und skizzieren Sie den Graphen von g' in Abbildung 2.

5 **b)** Die Funktion g hat eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

I $y = x - 1 + \dfrac{a}{(x-1)^2}$ **II** $y = \frac{1}{2}x - 1 + \dfrac{a}{x-1}$ **III** $y = \frac{1}{2}x - 1 + \dfrac{a}{(x-1)^2}$

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.
Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Bestimmen Sie den passenden Wert von a.

5 **c)** Betrachtet wird nun die Funktion h mit $h(x) = \ln\left(g(x)\right)$. Geben Sie mithilfe des Verlaufs von G_g die maximale Definitionsmenge D_h von h, das Verhalten von h an den Grenzen von D_h sowie einen Näherungswert für die Nullstelle von h an.

40

Analysis

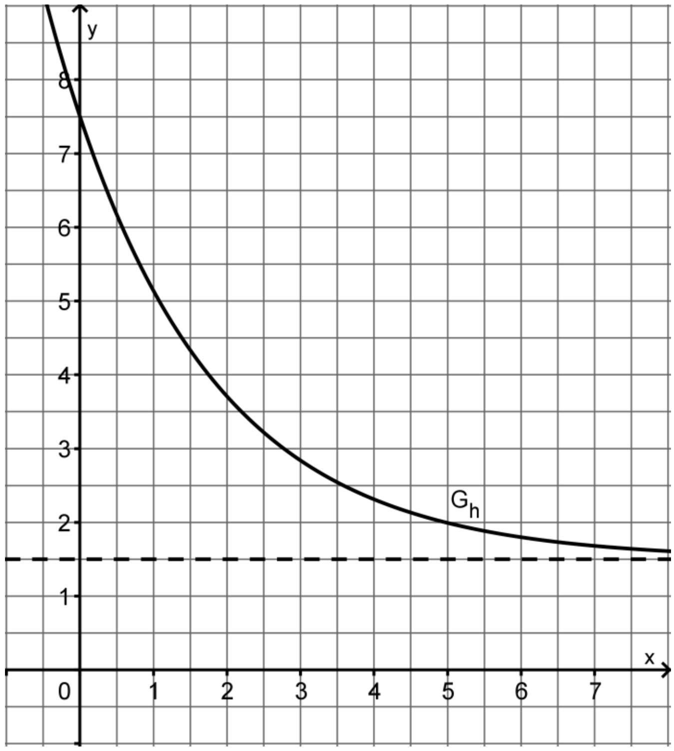
Aufgabengruppe II

BE	**Teil 1**
5	**1** Skizzieren Sie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 4 - x^2$. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt.
4	**2** Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $f: x \mapsto 3\sqrt{x}$ an und bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph den Punkt $(1 \mid 4)$ enthält.
	3 Betrachtet wird die Funktion $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3	**a)** Geben Sie die Nullstellen von f an.
3	**b)** Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an.
2	**c)** Bestimmen Sie den Term der Ableitung von f.
3	**4** Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.
20	

BE	**Teil 2**
	1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 6 \cdot e^{-0{,}5x} + x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
10	**a)** Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E \mid y_E)$ von G_f. *(zur Kontrolle: $x_E = 2 \cdot \ln 3$; $f''(x) = 1{,}5 \cdot e^{-0{,}5x}$)*
3	**b)** Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ an. Machen Sie plausibel, dass G_f für $x \to +\infty$ die Gerade mit der Gleichung $y = x$ als schräge Asymptote besitzt.
6	**c)** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(0 \mid 6)$. Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet anzulegendes Koordinatensystem.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5$. Die Abbildung zeigt den in $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Graphen G_h von h sowie dessen Asymptote, die durch die Gleichung $y = 1,5$ gegeben ist.



4 **a)** Beschreiben Sie, wie G_h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten natürlichen Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ hervorgeht.

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion h modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffausstoßes einer Maschine. Dabei ist x die seit dem Start der Maschine vergangene Zeit in Minuten und h(x) die momentane Schadstoffausstoßrate in Milligramm pro Minute.

3 **b)** Geben Sie in diesem Sachzusammenhang die Bedeutung des Monotonieverhaltens von G_h sowie des Grenzwerts von h für $x \to +\infty$ an.

6 **c)** Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ einschließen. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3 Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a: x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} - a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

5 **a)** Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden und in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend sind. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty$ gilt.

3 **b)** Aus den Ergebnissen der Aufgabe 3a ergibt sich, dass jede Funktion der Schar genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie für diese Nullstelle in Abhängigkeit von a einen Näherungswert x_1, indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durchführen.

40

Stochastik

Aufgabengruppe I

BE

Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten.

1 Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

4 **a)** Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.

Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.

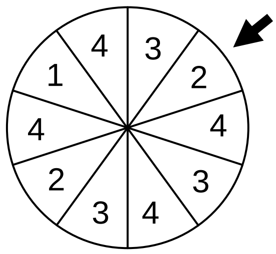
4 **b)** Ermitteln Sie

- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

2 **c)** Begründen Sie, dass kein Ergebnis der Umfrage denkbar ist, bei dem $p_1 > p_2$ ist.

Die Windkraftgegner schließen sich zu einer Bürgerinitiative zusammen.

2 Zur Aufbesserung ihrer finanziellen Mittel hat die Bürgerinitiative auf dem Gemeindefest ein Glücksrad mit zehn gleich großen Sektoren aufgebaut (vgl. Abbildung). Ein Spiel besteht aus dem einmaligen Drehen des Glücksrads; die erzielte Zahl gibt die Kategorie des Preises an, den der Spieler erhält.



(Fortsetzung nächste Seite)

5 **a)** Ein Preis der Kategorie 1 ist für die Bürgerinitiative mit Unkosten in Höhe von zehn Euro, ein Preis der Kategorie 2 mit Unkosten in Höhe von fünf Euro verbunden. Preise der Kategorien 3 und 4 werden von Sponsoren gestellt und verursachen keine Unkosten. Bestimmen Sie den im Mittel pro Spiel zu erwartenden Gewinn der Bürgerinitiative, wenn der Einsatz für ein Spiel 2,50 Euro beträgt und keine weiteren Unkosten anfallen.

5 **b)** Zehn Besucher des Gemeindefests drehen nacheinander jeweils einmal das Glücksrad. Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen lässt.

A: „Nur die ersten fünf Preise entfallen auf die Kategorie 4."

B: „Genau die Hälfte der Preise entfällt auf die Kategorie 4."

C: „Die Preise verteilen sich jeweils zur Hälfte auf die Kategorien 1 und 4."

5 **3** Die Bürgerinitiative veranstaltet am viel besuchten Badesee der Gemeinde eine Unterschriftenaktion gegen die geplante Windkraftanlage.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil p der Gegner der Windkraftanlage unter den Badegästen mindestens sein muss, damit sich unter zehn zufällig ausgewählten Badegästen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % wenigstens ein Gegner der Windkraftanlage befindet.

5 **4** Aufgrund der vielfältigen Aktivitäten der Bürgerinitiative vermutet der Gemeinderat, dass inzwischen mindestens 55 % der Wahlberechtigten der Gemeinde gegen die Errichtung der Windkraftanlage sind. Um diese Vermutung zu testen, werden 200 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte der Gemeinde befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Gemeinderats mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt werden soll?

30

Stochastik

Aufgabengruppe II

BE

1 Auf der Strecke München-Tokio bietet eine Fluggesellschaft ihren Passagieren verschiedene Menüs an, darunter ein vegetarisches. Aus Erfahrung weiß man, dass sich im Mittel 10 % der Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Passagiere ihre jeweilige Menüwahl unabhängig voneinander treffen.

4 **a)** Auf einem Flug nach Tokio sind 200 Passagiere an Bord. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mindestens 20 und höchstens 25 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

Auf dem Rückflug nach München ist die Maschine mit 240 Passagieren besetzt.

3 **b)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich auf dem Rückflug genau 20 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

4 **c)** Tatsächlich entscheiden sich auf dem Rückflug sechs weibliche und vierzehn männliche Reisende für das vegetarische Menü. Ermitteln Sie, wie viele weibliche Reisende unter den Passagieren sind, wenn die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Passagier ist weiblich.“ und „Ein zufällig ausgewählter Passagier entscheidet sich für das vegetarische Menü.“ unabhängig sind.

2 Die Fluggesellschaft beabsichtigt, ihren Passagieren neben dem Standardmenü gegen Zuzahlung ein Premiummenü anzubieten, möchte diesen Service jedoch nur dann einrichten, wenn er von mehr als 15 % der Passagiere gewünscht wird. Die Nullhypothese „Höchstens 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“ soll auf der Basis einer Stichprobe von 200 Passagieren auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

5 **a)** Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **b)** Die Fluggesellschaft hätte für den Test – bei gleichem Signifikanzniveau – anstelle der Nullhypothese

> „Höchstens 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

auch die Nullhypothese

> „Mehr als 15 % der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

wählen können. Bei der Wahl der Nullhypothese stand für die Fluggesell-

(Fortsetzung nächste Seite)

schaft eine der beiden folgenden Überlegungen im Vordergrund:

- Der irrtümliche Verzicht auf das Angebot des Premiummenüs wäre mit einem Imageverlust verbunden.
- Das irrtümliche Angebot des Premiummenüs wäre mit einem finanziellen Verlust verbunden.

Entscheiden Sie, welche der beiden Überlegungen für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese im Vordergrund stand. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

3 Bei einer Routineinspektion wird die Passagierkabine eines zufällig ausgewählten Flugzeugs des Typs X überprüft. Ein Mangel der Beleuchtung sowie ein Mangel der Klimaanlage liegen bei Flugzeugen dieses Typs jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vor; diese Wahrscheinlichkeiten können der folgenden Vierfeldertafel entnommen werden.

	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	
$\overline{B}$			0,04
		0,06	1

B: Beleuchtung einwandfrei
$\overline{B}$: Beleuchtung mangelhaft
K: Klimaanlage einwandfrei
$\overline{K}$: Klimaanlage mangelhaft

3 **a)** Bestimmen Sie den Wert von x und beschreiben Sie das zugehörige Ereignis in Worten.

3 **b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei dem zufällig ausgewählten Flugzeug des Typs X ein Mangel der Klimaanlage vor, wenn die Beleuchtung nicht einwandfrei funktioniert?

5 **c)** Bei Flugzeugen eines anderen Typs Y liegt ein Mangel der Klimaanlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, beträgt 5 %. Wenn mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, so funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % die Beleuchtung nicht einwandfrei. Stellen Sie zu der für Flugzeuge des Typs Y beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

30

Geometrie

Aufgabengruppe I

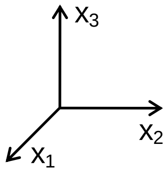
BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,60\,|\,0)$, $B(-80\,|\,60\,|\,60)$ und $C(-80\,|\,0\,|\,60)$ gegeben.

8 **a)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E? Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet.

(mögliche Teilergebnisse: $E: 3x_1 + 4x_3 = 0$; $\varphi \approx 36{,}9°$)

6 **b)** Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck OABC festlegt. Bestätigen Sie, dass dieses Rechteck den Flächeninhalt 6000 besitzt, und zeichnen Sie es in ein Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein.



Das Rechteck OABC ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks; die positive x_1-Achse beschreibt die südliche, die positive x_2-Achse die östliche Himmelsrichtung (im Koordinatensystem: 1 LE entspricht 1 m, d. h. die Länge des Grundstücks in West-Ost-Richtung beträgt 60 m.).

3 **c)** Obwohl das Rechteck OABC den Flächeninhalt 6000 besitzt, ist das Hanggrundstück auf einer Landkarte des Grundbuchamts mit einer Größe von 4800 m^2 verzeichnet. Stellen Sie ausgehend von der Zeichnung aus Aufgabe b eine Vermutung an, welche sinnvolle Regelung das Grundbuchamt damit bei der Festlegung der Grundstücksgröße umsetzt. Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnung.

Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, beschrieben wird.

3 **d)** Weisen Sie nach, dass der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand von 20 m zum Hang fliegt.

5 **e)** Zeigen Sie, dass dieser Abstand mit der minimalen Entfernung des Hubschraubers vom Mittelpunkt des Grundstücks übereinstimmt, der im Modell durch den Punkt $M(-40\,|\,30\,|\,30)$ dargestellt wird.

(Fortsetzung nächste Seite)

Im Mittelpunkt des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch vier an seiner Spitze befestigte Seile gehalten wird. Die Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfußpunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher, nördlicher, westlicher und südlicher Richtung.

5 **f)** Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des östlichen und nördlichen Verankerungspunkts V_O bzw. V_N.

30

Geometrie

Aufgabengruppe II

BE	
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1\,|\,7\,|\,3)$, $B(6\,|\,-7\,|\,1)$ und $C(-2\,|\,1\,|\,-3)$ gegeben.
4	**a)** Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck festlegen, dessen Hypotenuse die Strecke [AB] ist und dessen kürzere Kathete die Länge 9 hat.
6	**b)** Alle Punkte C* im Raum, die zusammen mit A und B ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck festlegen, bilden zwei gleich große Kreise. Beschreiben Sie (z. B. durch eine Skizze) die Lage der beiden Kreise bezüglich der Strecke [AB] und ermitteln Sie den Radius der beiden Kreise.
	Das Dreieck ABC aus Aufgabe a ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ABCS mit der Spitze $S(11{,}5\,|\,4\,|\,-6)$.
3	**c)** Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. *(mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$)*
7	**d)** Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenkante [BS] gegen die Ebene E sowie das Volumen V der Pyramide. *(Teilergebnis: $V = 216$)*
3	**e)** Welche Lagebeziehung muss eine Gerade zur Ebene E haben, wenn für jeden Punkt P dieser Geraden die Pyramide ABCP das gleiche Volumen wie die Pyramide ABCS besitzen soll? Begründen Sie Ihre Antwort.
7	**f)** Der Umkreis des Dreiecks ABC und der Punkt S legen einen Kegel fest. Zeigen Sie, dass es sich um einen geraden Kegel handelt, der Mittelpunkt des Grundkreises also zugleich der Höhenfußpunkt des Kegels ist. Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Kegels größer ist als das Volumen der Pyramide ABCS.
30	