Abiturprüfung 2011

Mathematik

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

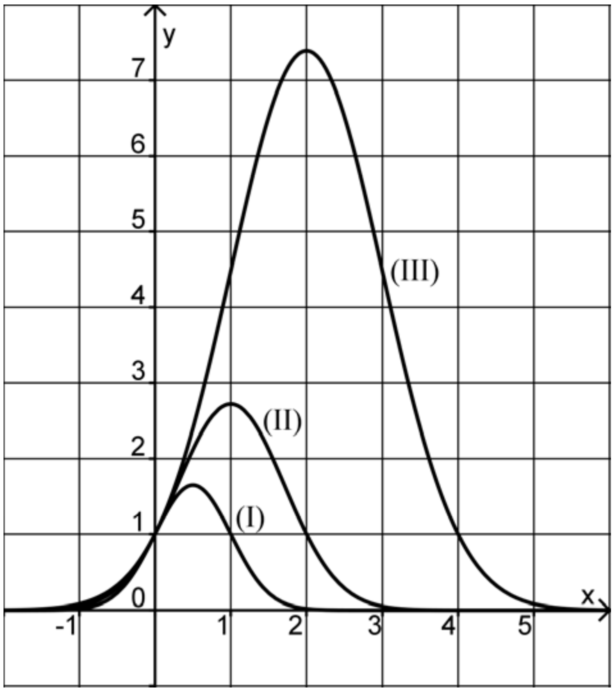
Der Fachausschuss wählt aus den Themengebieten LM1, LM2 und LM3 jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus.

LM1 Infinitesimalrechnung

BE

Aufgabengruppe I

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_s : x \mapsto e^{2x-\frac{1}{2}sx^2}$ mit $s \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Graph von f_s wird mit G_s bezeichnet. Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu ganzzahligen Werten des Parameters s.



3 1. a) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} f_s(x) = \lim_{x\to+\infty} f_s(x) = 0 .$$

5 b) Zeigen Sie, dass alle Schargraphen G_s durch den Punkt $(0|1)$ verlaufen und dass für $x \neq 0$ sowie $s_1 > s_2$ die Ungleichung $f_{s_1}(x) < f_{s_2}(x)$ erfüllt ist. Was lässt sich daraus hinsichtlich des Verlaufs der Graphen G_{s_1} und G_{s_2} schließen?

3 c) Weisen Sie nach, dass alle Schargraphen im Schnittpunkt mit der y-Achse die gleiche Steigung besitzen.

7 d) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_s.
Geben Sie an, zu welchem Wert des Parameters s die in der Abbildung dargestellten Graphen (I), (II) und (III) jeweils gehören.

5 e) Begründen Sie, dass G_s zu der durch die Gleichung $x = \frac{2}{s}$ gegebenen Geraden symmetrisch ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
7	2. Geben Sie für den Graphen G_F der in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f_2(t)\,dt$ das Monotonie- und Krümmungsverhalten an. Beschreiben Sie die Symmetrie von G_F und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
	3. Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion f_s den Bestand einer Bakterienkultur, der kontinuierlich Gift zugeführt wird (sogenanntes „vergiftetes Wachstum“). Dabei ist x die Maßzahl der seit Beginn der Giftzugabe vergangenen Zeit in Stunden, $f_s(x)$ die zugehörige Bakterienzahl in Millionen und s ein von der Wirksamkeit des Gifts abhängiger Parameter.
4	a) Wie hängt die Größe von s mit der Wirksamkeit des Gifts zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort. Für welchen Wert von s ist der maximale Bakterienbestand fünfmal so groß wie der Anfangsbestand?
6	b) Berechnen Sie den Zeitpunkt der stärksten Abnahme des Bakterienbestands in Abhängigkeit von s.
40	

BE

Aufgabengruppe II

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot \ln(\frac{x}{2})$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

4 a) Bestimmen Sie die Nullstelle von f und geben Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs an.

8 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E \mid y_E)$ sowie das Krümmungsverhalten von G_f.

[Teilergebnis: $x_E = \frac{2}{e}$]

5 c) Geben Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 0$ an. Berechnen Sie $f(3)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Die Einschränkung von f auf das Intervall $]0; x_E]$ besitzt die Umkehrfunktion g_1, die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_E; +\infty[$ die Umkehrfunktion g_2.

5 d) Die Graphen von f und g_2 haben den Punkt $S(x_S \mid y_S)$ gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von S. Zeichnen Sie die Graphen von g_1 und g_2 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.

[Teilergebnis: $x_S = 2\sqrt{e}$]

4 e) Ermitteln Sie den Term einer Stammfunktion F von f.

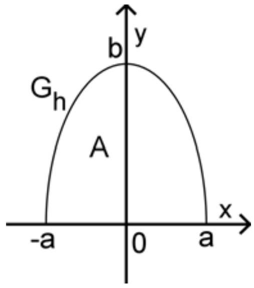
[mögliches Ergebnis: $F(x) = x^2 \cdot \ln(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}x^2$]

5 f) Die Graphen von f, g_1 und g_2 bilden, ergänzt durch den Koordinatenursprung, den Rand eines endlichen Flächenstücks. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Der Graph G_h der in $[-a; a]$ definierten Funktion h ist eine halbe Ellipse, die die y-Achse im Punkt $(0|b)$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück des Inhalts A einschließt ($a, b \in \mathbb{R}^+$; siehe Abbildung). Der Funktionsterm von h wird im Folgenden nicht benötigt.

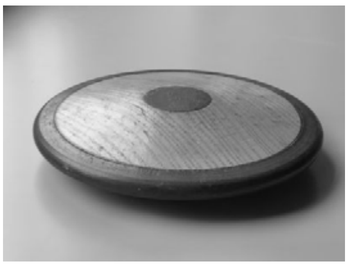


4 a) Weisen Sie nach, dass für jede reelle Zahl r die Beziehung

$$\pi \int_{-a}^{a} (h(x)+r)^2\,dx - \pi \int_{-a}^{a} (-h(x)+r)^2\,dx = 2\pi r \cdot 2A$$

gilt, indem Sie die linke Seite der Gleichung geeignet umformen.

5 b) Geben Sie an, wie die Graphen der in $[-a; a]$ definierten Funktionen $h_1 : x \mapsto h(x)+r$ und $h_2 : x \mapsto -h(x)+r$ aus G_h hervorgehen.
Durch den Term auf der linken Seite der Gleichung aus Teilaufgabe 2a wird für $r > b$ das Volumen eines Rotationskörpers beschrieben. Für welchen der abgebildeten Gegenstände stellt dieser Rotationskörper bei passender Wahl von a und b ein geeignetes Modell dar? Begründen Sie Ihre Antwort.



Diskus

Donut

Melone

40

LM2 Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik

BE

Aufgabengruppe III

Im Folgenden wird jeder Besucher des Kaufhauses City-Markt als Kunde bezeichnet – unabhängig davon, ob er etwas einkauft oder nicht.

1. In der Tiefgarage des Kaufhauses parken 60% der Kunden. Von den in der Tiefgarage parkenden Kunden tätigen 90% einen Einkauf im City-Markt. 5% aller Kunden benutzen weder die Tiefgarage noch kaufen sie etwas ein.

3 a) Wie viel Prozent der Kunden tätigen einen Einkauf im City-Markt?

3 b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der nicht in der Tiefgarage parkt, im City-Markt etwas einkauft.

8 2. In dem Kaufhaus werden Pullover der Marke Hecht ausschließlich in den Farben rot, blau und grün angeboten. Erfahrungsgemäß sind 40% der dort verkauften Pullover dieser Marke rot und 25% blau. Berechnen Sie für den Fall, dass im City-Markt im Laufe eines Tages unabhängig voneinander 15 Pullover der Marke Hecht verkauft werden, die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Mehr als die Hälfte dieser Pullover ist grün."

B: „Von jeder Farbe werden gleich viele Pullover verkauft."

C: „Der dreizehnte dieser Pullover ist der vierte blaue."

3. Ein Auszubildender legt in einem Schaufenster acht rote, fünf blaue und sieben grüne Pullover der Marke Hecht in einer Reihe aus.

2 a) Zeigen Sie, dass aus der Sicht eines Betrachters des Schaufensters $99\,768\,240$ verschiedene Farbzusammenstellungen dieser Reihe möglich sind.

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die vier mittleren Pullover rot, falls der Auszubildende die Anordnung rein zufällig vornimmt?

4. Die Geschäftsleitung des City-Markts vermutet, dass der Anteil der mit den Einkaufsbedingungen zufriedenen Kunden in letzter Zeit gesunken ist. Um diese Vermutung zu testen, werden 225 zufällig ausgewählte Kunden dahingehend befragt, ob sie mit den Einkaufsbedingungen zufrieden sind.

6 a) Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese „Höchstens 80% der Kunden sind mit den Einkaufsbedingungen zufrieden." auf einem Signifikanzniveau von 10%. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4 b) Es sei p der unbekannte Anteil der mit den Einkaufsbedingungen zufriedenen Kunden des City-Markts. Für welche Werte von p kann bei dem Test ein Fehler 2. Art auftreten? Die für diese Werte definierte Funktion $f: p \mapsto f(p)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art des Tests in Abhängigkeit von p an. Geben Sie das Monotonieverhalten von f an und erläutern Sie Ihre Antwort ohne zu rechnen.

5. Im Rahmen einer Werbeaktion wird im City-Markt ein Gewinnspiel angeboten. In einer Lostrommel befinden sich 15 Kugeln, von denen drei das Marktlogo „CM“ tragen. Ein Spiel besteht darin, fünf Kugeln ohne Zurücklegen zufällig zu ziehen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen Kugeln mit der Aufschrift „CM“. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

2 a) Geben Sie einen Ansatz an, mit dem sich $P(X = 2)$ bestimmen lässt.

Inhaber einer City-Markt-Kundenkarte dürfen einmalig an dem Gewinnspiel teilnehmen. Jedem Spieler wird auf der Kundenkarte das Dreifache der Anzahl der von ihm gezogenen „CM-Kugeln“ als Betrag in Euro gutgeschrieben. Die Zufallsgröße G beschreibt die Summe der Gutschriften bei n-facher Durchführung des Gewinnspiels.

5 b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von G.

[Ergebnis: $E(G) = 3n$, $\mathrm{Var}(G) = \frac{36}{7}n$]

3 c) Der Quotient aus Standardabweichung und Erwartungswert wird als relative Streuung bezeichnet. Wie häufig muss das Gewinnspiel mindestens durchgeführt werden, damit die relative Streuung von G höchstens 5% beträgt?

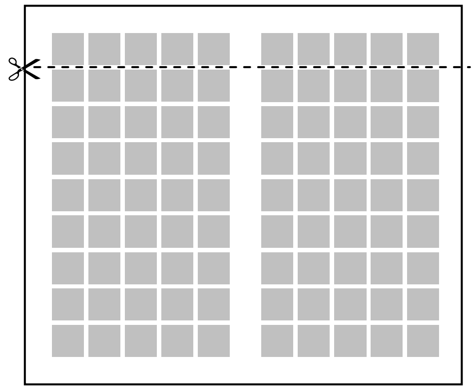
40

BE

Aufgabengruppe IV

Der im Jahr 1849 in Bayern herausgegebene „Schwarze Einser“ ist die erste in Deutschland erschienene Briefmarke.

1. An die Postschalter kam der Schwarze Einser in Bögen zu je 90 Stück. In der Mitte jedes Bogens befand sich der unbedruckte Zwischensteg, so dass die Marken in zwei Blöcken angeordnet waren (vgl. Abbildung). Ein gewissenhafter Postbeamter schnitt seinerzeit mit einer Schere die jeweils gewünschte Stückzahl Zeile für Zeile von oben nach unten aus einem Bogen, wobei das Abschneiden des Randes und das Trennen in einzelne Marken dem Kunden oblagen. War dieser Bogen zu Ende, griff der Beamte zum nächsten.



   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde

3 a) beim Kauf einer einzelnen Briefmarke eine Marke vom Rand eines Blocks erhielt.

3 b) beim Kauf von drei Briefmarken einen aus drei Marken bestehenden Streifen erhielt, der nicht durch den Zwischensteg unterbrochen war.

Wegen seines hohen Sammlerwerts wurden auch viele Fälschungen des Schwarzen Einsers produziert. Erfahrene Prüfer können sowohl Fälschungen als auch echte Marken eindeutig identifizieren. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass sowohl 30% der gestempelten als auch 30% der ungestempelten Schwarzen Einser gefälscht sind und dass die Prüfergebnisse für einzelne Marken unabhängig voneinander sind.

4 2. a) Wie viele Schwarze Einser – gestempelt oder ungestempelt – müssen mindestens geprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Fälschung dabei ist?

4 b) Ein Auktionshaus verschickt zehn einzelne Schwarze Einser, unter denen sich genau vier Fälschungen befinden, in einer zweizeiligen Einsteckkarte an einen Prüfer. Wie viele verschiedene Anordnungen der Briefmarken sind dabei möglich, wenn in jeder Zeile fünf Marken stecken und nur zwischen echten und gefälschten Marken unterschieden wird?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Da gestempelte Schwarze Einser noch wertvoller sind als ungestempelte, werden häufig auch die Poststempel auf den Marken gefälscht. Gehen Sie davon aus, dass 40% aller Stempel auf Schwarzen Einsern gefälscht sind, wobei gefälschte Stempel sowohl auf echten als auch auf gefälschten Marken zu finden sind. Echte Stempel auf gefälschten Marken kommen hingegen nicht vor.

4 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stempel auf einem echten Schwarzen Einser gefälscht ist.

3 b) Ein Prüfer untersucht bei einem Schwarzen Einser zuerst den Stempel und stellt fest, dass dieser gefälscht ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Briefmarke selbst echt?

4. Heinz erbt von seinem Großvater 15 ungestempelte Schwarze Einser, die dieser unabhängig voneinander als Einzelstücke erworben hat. Z beschreibe allgemein die Anzahl der Fälschungen in einer aus 15 Marken bestehenden zufälligen Auswahl ungestempelter Schwarzer Einser.

5 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der gefälschten Schwarzen Einser in Heinz' Erbschaft vom Erwartungswert von Z um höchstens eine Standardabweichung von Z abweicht.

Da ungeprüfte Marken nicht zu einem angemessenen Preis verkauft werden können, entschließt sich Heinz, seine Marken prüfen zu lassen. Falls sich eine Marke als echt herausstellt, werden 6% des Katalogpreises als Prüfgebühr verlangt, andernfalls nur 2%.
Bei einem Katalogpreis von 1300 Euro kann für einen echten Schwarzen Einser tatsächlich ein Verkaufspreis von 800 Euro erzielt werden. Ein als gefälscht deklarierter Schwarzer Einser kann für 30 Euro verkauft werden.

8 b) Zeigen Sie, dass Heinz für seine Erbschaft insgesamt – nach Abzug der Prüfgebühren – einen Erlös in Höhe von $10830\,€ - k \cdot 718\,€$ erzielen kann, wenn sich bei der Prüfung k Schwarze Einser als gefälscht herausstellen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt Heinz insgesamt einen Erlös von weniger als 7500 Euro?

6 5. Berichten der Europäischen Zentralbank zufolge war in der ersten Hälfte des Jahres 2009 etwa jeder 12700-ste 20-Euro-Schein gefälscht.
Es wird vermutet, dass die Fälschungsquote bei den 20-Euro-Scheinen inzwischen auf über $8 \cdot 10^{-5}$ angestiegen ist. Um diese Vermutung (Nullhypothese) zu testen, werden von der Bundesbank zehn Millionen zufällig ausgewählte 20-Euro-Scheine geprüft. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von 5% unter Verwendung der Normalverteilung als Näherung.

40

LM3 Analytische Geometrie

BE

Aufgabengruppe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|-6|2)$ und $B(10|30|11)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

3 1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, der Punkt B dagegen nicht.

5 b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Gerade g und den Punkt B festgelegt wird, in Normalenform. Geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

[mögliches Teilergebnis: $E: x_1 - x_3 + 1 = 0$]

9 c) Der Punkt C auf der Geraden g bildet mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis [AC]. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und zeigen Sie, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $504\sqrt{2}$ hat.

[Teilergebnis: $C(-13|50|-12)$]

5 d) Geben Sie an, wie man für ein beliebiges Dreieck mithilfe der Innenwinkel entscheiden kann, ob der Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt oder nicht. Treffen Sie damit diese Entscheidung nachvollziehbar für das Dreieck ABC.

6 e) Die Punkte A, B und C sollen gemeinsam mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide bilden, die das Volumen 1344 hat. Erläutern Sie, warum die dafür geeigneten Punkte zwei Ebenen bilden, und ermitteln Sie für diese beiden Ebenen jeweils eine Gleichung in Normalenform.

2. Gegeben ist nun zusätzlich die Ebenenschar $H_t: tx_1 + x_2 + tx_3 = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$.

4 a) Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Geraden. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

5 b) Ermitteln Sie jeweils, ob es eine Ebene der Schar gibt, die

α) die Gerade g enthält.

β) parallel zur Ebene E aus Teilaufgabe 1b ist.

3 c) Liegt jeder beliebige Punkt P auf einer der Scharebenen? Begründen Sie Ihre Antwort.

40

BE	**Aufgabengruppe VI**
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1\,\vert\,-2\,\vert\,-3)$, $B(3\,\vert\,-1\,\vert\,-2)$ und $C(1\,\vert\,-3\,\vert\,-1)$ sowie die Ebenenschar $E_k: (2+4k)\cdot x_1 + (2+k)\cdot x_2 + (k-1)\cdot x_3 + 3 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.
7	1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die das Dreieck enthält, in Normalenform. [mögliches Ergebnis: $F: x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 9 = 0$]
4	b) Weisen Sie nach, dass jede Ebene der Schar E_k senkrecht zu F steht und den Punkt C enthält.
3	c) Begründen Sie, dass die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, die Schnittgerade aller Ebenen der Schar ist.
6	d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene W, bezüglich der die Punkte A und B symmetrisch liegen, in Normalenform. Zeigen Sie, dass W die Gerade s enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_k gehört.
4	e) Berechnen Sie den Abstand der Geraden AB und s.
6	2. a) Zeigen Sie, dass der Punkt A in der Scharebene E_0 und der Punkt B in der Scharebene E_{-1} liegt. Das Lot auf E_0 in A und das Lot auf E_{-1} in B schneiden sich im Punkt P. Ermitteln Sie die Koordinaten von P. [Teilergebnis: $P(1\,\vert\,0\,\vert\,-4)$]
4	b) Es gibt zwei Punkte auf der Geraden CP, die von P den Abstand $\sqrt{2}$ haben; Q sei derjenige von beiden, der nicht auf der Strecke [CP] liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q. [Ergebnis: $Q(1\,\vert\,1\,\vert\,-5)$]
6	c) Rotiert das Dreieck AQC um die Seite [CQ], so entsteht ein Doppelkegel. Berechnen Sie dessen Volumen.
40	