Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

4 **a)** Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}; \quad \frac{2}{x^2+4x+3}; \quad \frac{1}{0{,}5 \cdot (x+2)^2 - 0{,}5}$$

3 **b)** Begründen Sie, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p: x \mapsto 0{,}5 \cdot (x+2)^2 - 0{,}5$, die die Nullstellen $x = -3$ und $x = -1$ hat.

Für $x \in D_f$ gilt $f(x) = \frac{1}{p(x)}$.

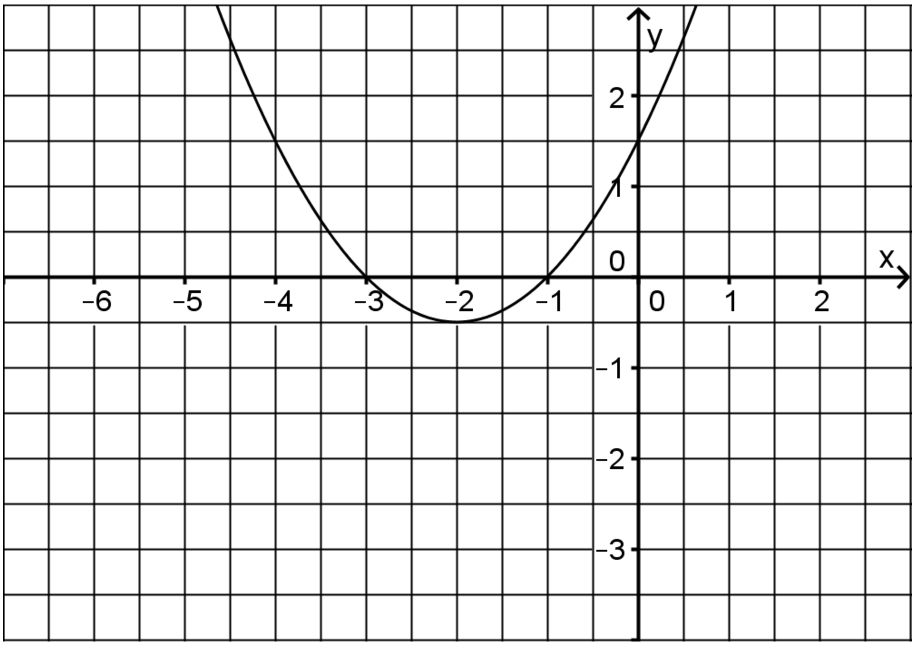

Abb. 1

5 **c)** Gemäß der Quotientenregel gilt für die Ableitungen f' und p' die Beziehung $f'(x) = -\frac{p'(x)}{(p(x))^2}$ für $x \in D_f$.

Zeigen Sie unter Verwendung dieser Beziehung und ohne Berechnung von $f'(x)$ und $p'(x)$, dass $x = -2$ einzige Nullstelle von f' ist und dass G_f in $]-3; -2[$ streng monoton steigend sowie in $]-2; -1[$ streng monoton fallend ist. Geben Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **d)** Berechnen Sie $f(-5)$ und $f(-1{,}5)$ und skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1.

2 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \dfrac{3}{e^{x+1}-1}$ mit Definitionsbereich $D_h =]-1; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_h von h.

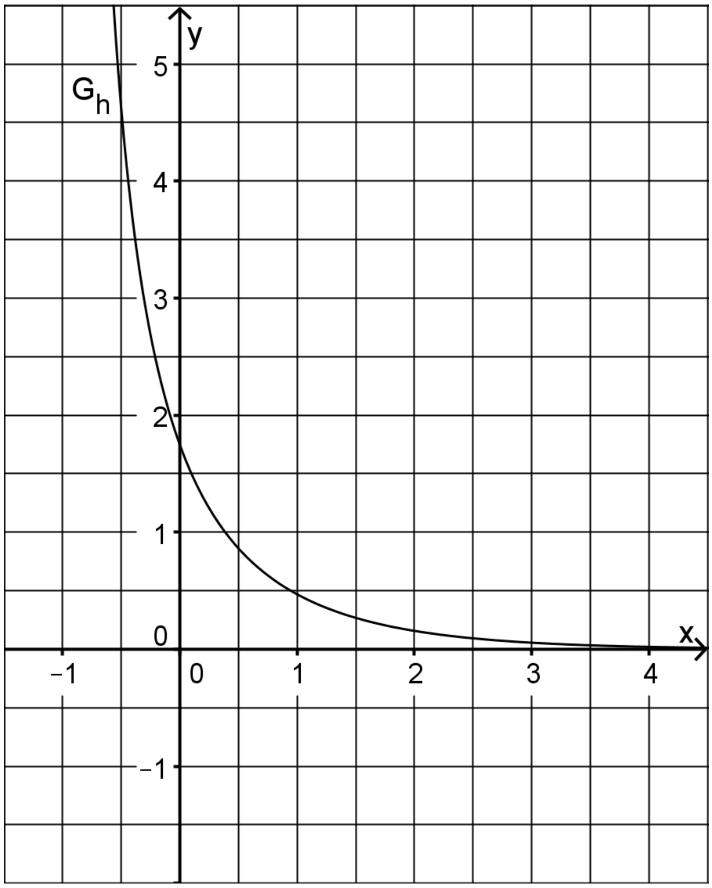

Abb. 2

4 **a)** Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ gilt.

Zeigen Sie rechnerisch für $x \in D_h$, dass für die Ableitung h' von h gilt: $h'(x) < 0$.

Gegeben ist ferner die in D_h definierte Integralfunktion $H_0 : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$.

4 **b)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Aussagen wahr sind:

α) Der Graph von H_0 ist streng monoton steigend.

β) Der Graph von H_0 ist rechtsgekrümmt.

6 **c)** Geben Sie die Nullstelle von H_0 an und bestimmen Sie näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $H_0(-0{,}5)$ sowie $H_0(3)$. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen von H_0 im Bereich $-0{,}5 \le x \le 3$.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 In einem Labor wird ein Verfahren zur Reinigung von mit Schadstoffen kontaminiertem Wasser getestet. Die Funktion h aus Aufgabe 2 beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffabbaus in einer bestimmten Wassermenge. Dabei bezeichnet $h(x)$ die momentane Schadstoffabbaurate in Gramm pro Minute und x die seit Beginn des Reinigungsvorgangs vergangene Zeit in Minuten.

3 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Zeitpunkt x, zu dem die momentane Schadstoffabbaurate auf 0,01 Gramm pro Minute zurückgegangen ist.

Die in $\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ definierte Funktion $k : x \mapsto 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) - 0{,}2$ stellt im Bereich $-0{,}5 \leq x \leq 2$ eine gute Näherung für die Funktion h dar.

2 **b)** Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion k aus dem Graphen der Funktion f aus Aufgabe 1 hervorgeht.

5 **c)** Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int_0^1 h(x)\,dx$, indem Sie den Zusammenhang $\int_0^1 h(x)\,dx \approx \int_0^1 k(x)\,dx$ verwenden. Geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto ax^4 + bx^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

4 **a)** $W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

4 **b)** Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Die Gerade g schneidet G_f in den Punkten W und $(2|0)$.

4 **c)** Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

6 **d)** G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein, das durch die Gerade g in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n: x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0: x \mapsto x^4 - 2$.

4 **a)** Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordnen Sie jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründen Sie drei Ihrer Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.

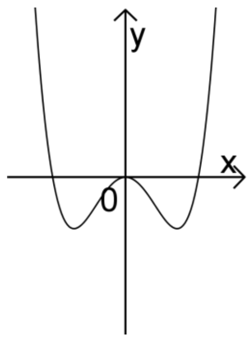

Abb. 1

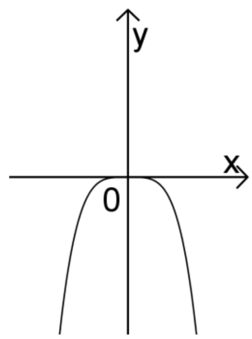

Abb. 2

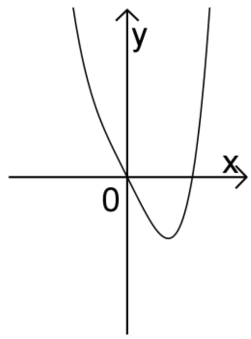

Abb. 3

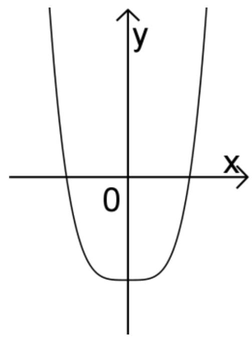

Abb. 4

3 **b)** Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle.

Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g: t \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Abbildung 5 zeigt den durch die Funktion g beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.

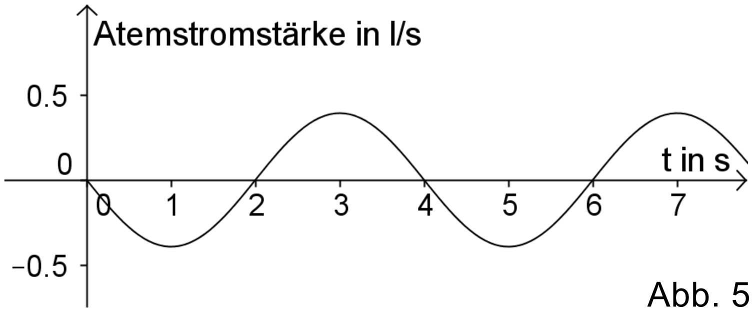

Abb. 5

2 **a)** Berechnen Sie $g(1{,}5)$ und interpretieren Sie das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

2 **b)** Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und machen Sie Ihre Antwort mithilfe von Abbildung 5 plausibel.

4 **c)** Berechnen Sie $\int_2^4 g(t)\,dt$ und deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

(Teilergebnis: Wert des Integrals: 0,5)

3 **d)** Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe 3c in einem Koordinatensystem für $0 \leq t \leq 8$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

4 **e)** Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20 % höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.

40