Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

3 **b)** Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

4 **c)** Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung f'' von f die Beziehung $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$)

3 **d)** Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

3 **e)** Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $P(2\,|\,f(2))$ auf eine Dezimale genau. Zeichnen Sie den Punkt P und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 9$).

4 **f)** Berechnen Sie $f(4)$, im Hinblick auf eine der folgenden Aufgaben auf zwei Dezimalen genau, und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1e ein.

3 **g)** Zeigen Sie durch Rechnung, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1$ gilt.

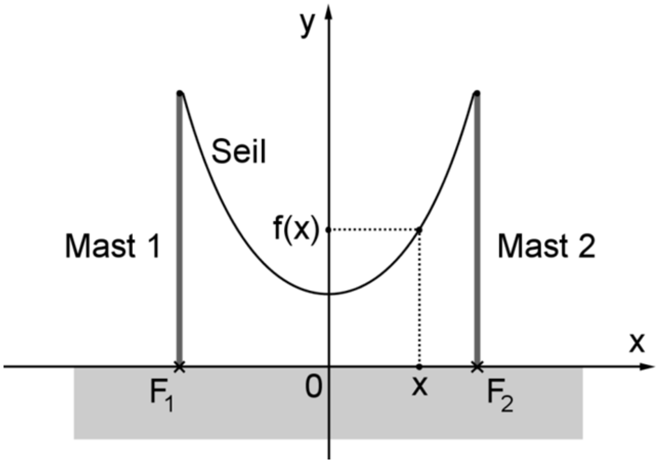
Die als Kurvenlänge $L_{a;b}$ bezeichnete Länge des Funktionsgraphen von f zwischen den Punkten $(a\,|\,f(a))$ und $(b\,|\,f(b))$ mit $a < b$ lässt sich mithilfe der Formel $L_{a;b} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ berechnen.

4 **h)** Bestimmen Sie mithilfe der Beziehung aus Aufgabe 1g die Kurvenlänge $L_{0;b}$ des Graphen von f zwischen den Punkten $(0\,|\,f(0))$ und $(b\,|\,f(b))$ mit $b > 0$.

(Ergebnis: $L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$)

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Enden eines Seils werden an zwei vertikalen Masten, die 8,00 m voneinander entfernt sind, in gleicher Höhe über dem Erdboden befestigt. Der Graph G_f aus Aufgabe 1 beschreibt im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ modellhaft den Verlauf des Seils, wobei die Fußpunkte F_1 und F_2 der Masten durch die Punkte $(-4\,|\,0)$ bzw. $(4\,|\,0)$ dargestellt werden (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



2 **a)** Der Höhenunterschied zwischen den Aufhängepunkten und dem tiefsten Punkt des Seils wird als Durchhang bezeichnet. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Durchhang des Seils auf Zentimeter genau.

5 **b)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, den das Seil mit Mast 2 im Aufhängepunkt einschließt, sowie mithilfe der Kurvenlänge aus Aufgabe 1h die Länge des zwischen den Masten hängenden Seils auf Zentimeter genau.

Der Graph von f soll durch eine Parabel näherungsweise dargestellt werden. Dazu wird die in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion q betrachtet, deren Graph den Scheitelpunkt $(0\,|\,2)$ hat und durch den Punkt $(4\,|\,f(4))$ verläuft.

4 **c)** Ermitteln Sie den Term $q(x)$ der Funktion q, ohne dabei zu runden.

3 **d)** Für jedes $x \in \,]0;4[$ wird der Abstand der vertikal übereinander liegenden Punkte $(x\,|\,q(x))$ und $(x\,|\,f(x))$ der Graphen von q bzw. f betrachtet, wobei in diesem Bereich $q(x) > f(x)$ gilt. Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel den Graphen G_f im Bereich $0 < x < 4$ annähert. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte, mithilfe derer man diesen größten Abstand rechnerisch bestimmen kann.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

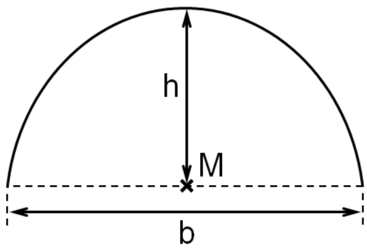
BE

Im Rahmen eines W-Seminars modellieren Schülerinnen und Schüler einen Tunnelquerschnitt, der senkrecht zum Tunnelverlauf liegt. Dazu beschreiben sie den Querschnitt der Tunnelwand durch den Graphen einer Funktion in einem Koordinatensystem. Der Querschnitt des Tunnelbodens liegt dabei auf der x-Achse, sein Mittelpunkt M im Ursprung des Koordinatensystems; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Für den Tunnelquerschnitt sollen folgende Bedingungen gelten:

I Breite des Tunnelbodens: $b = 10$ m

II Höhe des Tunnels an der höchsten Stelle: $h = 5$ m

III Der Tunnel ist auf einer Breite von mindestens 6 m mindestens 4 m hoch.



1 Eine erste Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet die Funktion $p: x \mapsto -0{,}2x^2 + 5$ mit Definitionsbereich $D_p = [-5;5]$.

6 **a)** Zeigen Sie, dass die Bedingungen I und II in diesem Modell erfüllt sind. Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, unter dem bei dieser Modellierung die linke Tunnelwand auf den Tunnelboden trifft.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen nun den Abstand $d(x)$ der Graphenpunkte $P_x(x \mid p(x))$ vom Ursprung des Koordinatensystems.

3 **b)** Zeigen Sie, dass $d(x) = \sqrt{0{,}04x^4 - x^2 + 25}$ gilt.

5 **c)** Es gibt Punkte des Querschnitts der Tunnelwand, deren Abstand zu M minimal ist. Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte P_x, für die $d(x)$ minimal ist, und geben Sie davon ausgehend diesen minimalen Abstand an.

2 Eine zweite Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet eine Kosinusfunktion vom Typ $k: x \mapsto 5 \cdot \cos(c \cdot x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ und Definitionsbereich $D_k = [-5;5]$, bei der offensichtlich Bedingung II erfüllt ist.

5 **a)** Bestimmen Sie c so, dass auch Bedingung I erfüllt ist, und berechnen Sie damit den Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels.

(zur Kontrolle: $c = \frac{\pi}{10}$, Inhalt der Querschnittsfläche: $\frac{100}{\pi}\,m^2$)

2 **b)** Zeigen Sie, dass Bedingung III weder bei einer Modellierung mit p aus Aufgabe 1 noch bei einer Modellierung mit k erfüllt ist.

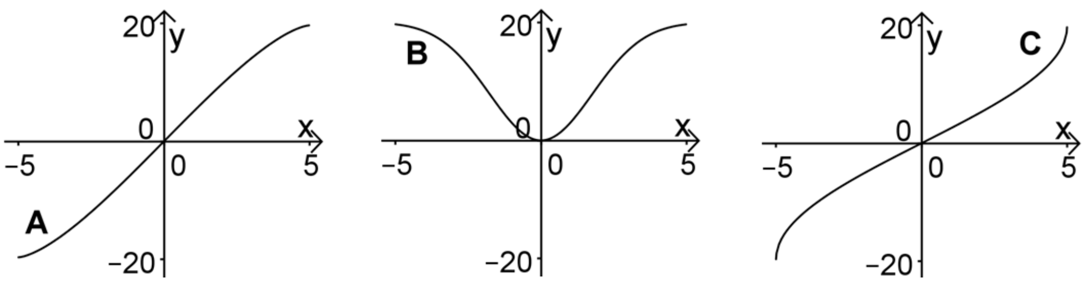
(Fortsetzung nächste Seite)

3 Eine dritte Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand, bei der ebenfalls die Bedingungen I und II erfüllt sind, verwendet die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = [-5;5]$.

5 **a)** Begründen Sie, dass in diesem Modell jeder Punkt des Querschnitts der Tunnelwand von der Bodenmitte M den Abstand 5 m hat.
Zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf spätere Aufgaben: $-5 \leq x \leq 9$, $-1 \leq y \leq 13$) und begründen Sie, dass bei dieser Modellierung auch Bedingung III erfüllt ist.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mit Definitionsbereich $D_F = [-5;5]$.

5 **b)** Zeigen Sie mithilfe einer geometrischen Überlegung, dass $F(5) = \frac{25}{4}\pi$ gilt.
Einer der Graphen A, B und C ist der Graph von F. Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht infrage kommen.



2 **c)** Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels bei einer Modellierung mit f von dem in Aufgabe 2a berechneten Wert abweicht.

Der Tunnel soll durch einen Berg führen. Im betrachteten Querschnitt wird das Profil des Berghangs über dem Tunnel durch eine Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{4}{3}x + 12$ modelliert.

4 **d)** Zeigen Sie, dass die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $R(4 \mid f(4))$ parallel zu g verläuft. Zeichnen Sie g und t in das Koordinatensystem aus Aufgabe 3a ein.

3 **e)** Der Punkt R aus Aufgabe 3d entspricht demjenigen Punkt der Tunnelwand, der im betrachteten Querschnitt vom Hangprofil den kleinsten Abstand e in Metern hat. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte eines Verfahrens zur rechnerischen Ermittlung von e.

40