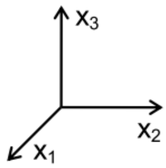
Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A(0 \mid \sqrt{2} \mid 2)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

6 **a)** Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse und mit der x_3-Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung).



Die x_1x_2-Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

3 **b)** Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M(0 \mid 3\sqrt{2} \mid 2)$ hat.

5 **c)** Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B. Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.

(Teilergebnis: $B(-1 \mid 2\sqrt{2} \mid 3)$)

2 **d)** Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt: $\vec{C} = \vec{M} + \vec{v}$.

(Fortsetzung nächste Seite)

4

e) Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $[AB]$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem 10 m in der Realität entspricht.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Abbildung 1 zeigt eine Sonnenuhr mit einer gegenüber der Horizontalen geneigten, rechteckigen Grundplatte, auf der sich ein kreisförmiges Zifferblatt befindet. Auf der Grundplatte ist der Polstab befestigt, dessen Schatten bei Sonneneinstrahlung die Uhrzeit auf dem Zifferblatt anzeigt.

Abb. 1

Eine Sonnenuhr dieser Bauart wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt das Rechteck ABCD mit $A(5|-4|0)$ und $B(5|4|0)$ die Grundplatte der Sonnenuhr. Der Befestigungspunkt des Polstabs auf der Grundplatte wird im Modell durch den Diagonalenschnittpunkt $M(2{,}5|0|2)$ des Rechtecks ABCD dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität. Die Horizontale wird im Modell durch die x_1x_2-Ebene beschrieben.

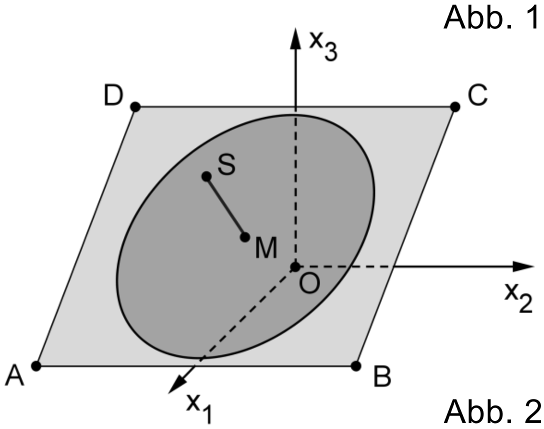


Abb. 2

5 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck ABCD liegt, in Normalenform.

(mögliches Teilergebnis: $E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$)

4 **b)** Die Grundplatte ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Damit man mit der Sonnenuhr die Uhrzeit korrekt bestimmen kann, muss für den Breitengrad φ des Aufstellungsorts der Sonnenuhr $\alpha + \varphi = 90°$ gelten. Bestimmen Sie, für welchen Breitengrad φ die Sonnenuhr gebaut wurde.

3 **c)** Der Polstab wird im Modell durch die Strecke $[MS]$ mit $S(4{,}5|0|4{,}5)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass der Polstab senkrecht auf der Grundplatte steht, und berechnen Sie die Länge des Polstabs auf Zentimeter genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

Sonnenlicht, das an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 auf die Sonnenuhr einfällt, wird im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

6 **d)** Weisen Sie nach, dass der Schatten der im Modell durch den Punkt S dargestellten Spitze des Polstabs außerhalb der rechteckigen Grundplatte liegt.

2 **e)** Um 6 Uhr verläuft der Schatten des Polstabs im Modell durch den Mittelpunkt der Kante $[BC]$, um 12 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AB]$ und um 18 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AD]$. Begründen Sie, dass der betrachtete Zeitpunkt t_0 vor 12 Uhr liegt.

20