

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

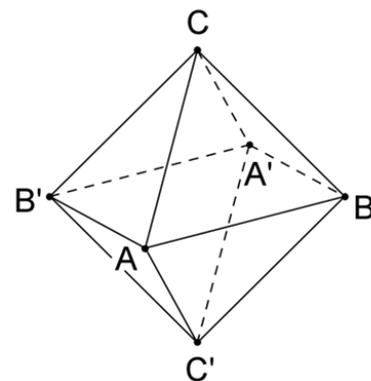
- 4 **a)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E : x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$)

Spiegelt man die Punkte A, B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A' , B' bzw. C' .

- 3 **b)** Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, im Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass die Strecke $[CC']$ senkrecht auf dieser Ebene steht.
- 4 **c)** Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C bzw. C' .



- 2 **d)** Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.
- 4 **e)** Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.
- 3 **f)** Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an. Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.

20

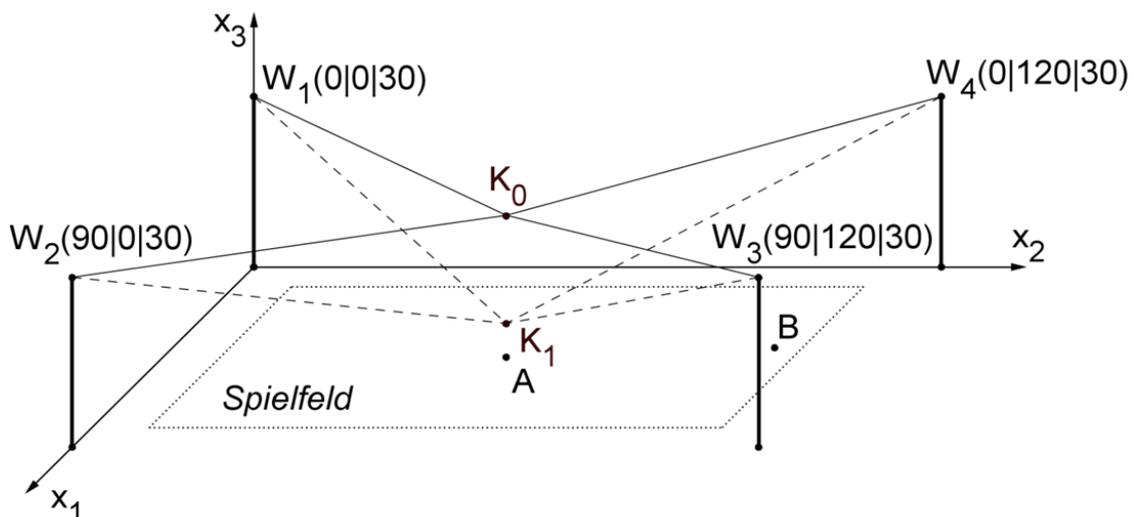
Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.

In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der x_1x_2 -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1 , W_2 , W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45|60|0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld. Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt. Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19 m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0 , die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

4

- a) Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

(Fortsetzung nächste Seite)

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung $g: \vec{X} = \vec{K}_1 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, zum Punkt K_2 .

3 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2 .
(Ergebnis: $K_2(51 | 100 | 10)$)

4 **c)** Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40 | 105 | 0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50 | 70 | 15)$ beschrieben.

7 **d)** Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1 , W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.
(Mögliches Teilergebnis: $E : x_2 + 5x_3 - 150 = 0$)

2 **e)** Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist: „Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E , so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1K_2]$ und $[W_2K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren.“