Hinweise für Lehrkräfte

Die Angaben zu Hilfsmitteln, Aufgabenauswahl und Gewichtung im Wahlteil sind den folgenden Hinweisen zu entnehmen, die auch die Prüflinge erhalten:

Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 94 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 120 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (46 BE)	Block 2 Stochastik (24 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (24 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Abweichung zu den angegebenen Zeitpunkten: $\frac{f(0)-2000}{2000}=0$; $\frac{f(4)-3140}{3140}\approx -0{,}037$; $\frac{f(6)-1500}{1500}\approx 0{,}045$; $\frac{f(10)-1440}{1440}=0$ Für Zeitpunkte der Spitzenwerte muss gelten: $f'(t_S)=0$. Die Bedingung liefert: $t_{S1}=2$; $t_{S2}=8$; $t_{S3}=12$. Da gilt: $f''(2)=-720$; $f''(8)=288$; $f''(12)=-480$, liegen nur für t_{S1} und t_{S3} Spitzenwerte vor. Die Abweichung beträgt für t_{S1} 0 h und für t_{S3} 0,2 h, das ist in beiden Fällen weniger als 15 Minuten. Damit sind alle gestellten Bedingungen erfüllt.	I / II	6	
	Zum Zeitpunkt der stärksten Abnahme hat f eine Wendestelle. Die Gleichung $f''(t_W)=0$ hat im gegebenen Intervall die Lösungen t_{W1} mit $t_{W1}\approx 4{,}43$ und t_{W2} mit $t_{W2}\approx 10{,}24$. Aufgrund der zuvor bestimmten Maximal- und Minimalstellen ist der Zeitpunkt der stärksten Abnahme durch die erste Wendestelle gegeben. Dieser Zeitpunkt liegt also etwa 4,43 Stunden nach Arbeitsbeginn.	I / II	4	
	Aus dem Ansatz $f(t)=1500$ ergibt sich, dass der Gasstrom ungefähr 6,12 h, 10,16 h und 13,26 h nach Arbeitsbeginn $1500\,\frac{L}{h}$ beträgt. Zwischen Arbeitsbeginn und etwa 6,12 h sowie zwischen den beiden anderen Zeitpunkten beträgt der Gasstrom mindestens $1500\,\frac{L}{h}$. Der Gesamtzeitraum ist also ungefähr 9,22 h lang.	I / II	4	
b)	Aus dem gefüllten Tank können 15600 L Gas entnommen werden. Zu einem Zeitpunkt x gibt das Integral das schon entnommene Gasvolumen an, das von dem Anfangsvolumen subtrahiert werden muss.	I / II	3	
	20 % von 15600 L sind 3120 L. Der Ansatz $15600-\int_0^a f(t)\,dt=3120$ liefert drei Werte a_1, a_2 und a_3. Nur der Wert a_2 mit $a_2\approx 3{,}51$ liegt innerhalb des Intervalls $[0;14]$. Nach etwa 3,5 Stunden muss der erste Auftankvorgang beginnen.	I / II	4	
c)	Mit $d(t)=2000-f(t)$ und $d(t)=0$ ergeben sich die drei Zeitpunkte $t_1=0$, $t_2=\frac{16}{3}$ und $t_3=12$, zu denen ein Wechsel zwischen Zu- und Abnahme stattfinden kann. Z. B. aufgrund $d(2)=-2000$, $d(10)=560$ und $d(13)=299$ kann man schließen, dass das entnehmbare Gasvolumen zwischen 0 h und $5\frac{1}{3}$ h nach Arbeitsbeginn abnimmt, zwischen $5\frac{1}{3}$ h und 12 h sowie zwischen 12 h und dem Ende des Arbeitstages zunimmt.	II	4	

Fortsetzung Aufgabe 1A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
	$\int_0^{14} f(t)\,dt = 29881{,}6$; $29881{,}6 : 14 = 2134{,}4$ Der konstante Gasstrom müsste etwa $2134\,\frac{L}{h}$ betragen. Eine Befüllung mit diesem Gasstrom ist nicht möglich, da aus dem gefüllten Tank zu Beginn des Arbeitstages das Gas nur mit einem Gasstrom von $2000\,\frac{L}{h}$ entnommen wird.	II	3	
	Der Tank fasst $15600\,L$, von denen zu Beginn des Arbeitstages noch $3120\,L$ vorhanden sind. Das innerhalb der dreißig Minuten verbrauchte Gasvolumen erhält man über $\int_0^{0,5} f(t)\,dt \approx 1255{,}4$. Es werden innerhalb der dreißig Minuten ungefähr $15600\,L - 3120\,L + 1255{,}4\,L$ in den Tank gepumpt. Der Gasstrom beträgt also ungefähr $27471\,\frac{L}{h}$.	II	3	
d)	Zu dem Graphen II gehört der Parameterwert 0, Begründung beispielsweise über $f_0(2) = 0$.	I	2	
	Der Graph der ganzrationalen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, wenn nur geradzahlige Exponenten auftreten. Dies ist der Fall für $k = -1$.	II	2	
	Mögliche Wendestellen: $3 \cdot (x_W - 1) \cdot (x_W - k) = 0$ liefert $x_W = k$ oder $x_W = 1$. Für $x_W = 1$ liegen die möglichen Wendepunkte wegen $f_k(1) = k - \frac{1}{4}$ auf der Geraden zu $x = 1$. Für $x_W = k$ liegen die möglichen Wendepunkte wegen $f_k(k) = -\frac{k^3 \cdot (k-4)}{4}$ auf dem Graphen zu $y = -\frac{x^3 \cdot (x-4)}{4}$.	II / III	6	
	Besitzt die zweite Ableitung von h eine Nullstelle, h aber keine Wendestelle, muss die zweite Ableitung eine Nullstelle aufweisen, in der sich das Vorzeichen nicht ändert, z. B.: $h''(x) = (x-2)^2$, eine mögliche Ableitungsfunktion hätte den Term $\frac{(x-2)^3}{3}$. Soll keine Extremstelle vorliegen, so hat die Ableitungsfunktion an der Stelle 2 keine Nullstelle, also z. B. $h'(x) = \frac{(x-2)^3}{3} + 1$. Eine Funktion h kann dann gegeben sein durch $h(x) = \frac{(x-2)^4}{12} + x$.	III	5	
	Summe:		**46**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Die Funktionen f_k sind für $k>0$ alle monoton zunehmend und für $k<0$ monoton abnehmend. Deshalb muss der Graph II zu f_k mit $k=0{,}5$ gehören und Graph I zu f_k mit $k=-1$.	I	2	
	Es gilt $f_k{}'(x)=k\cdot e^{k\cdot x}$. Aus dem Ansatz $f_k{}'(x)=1$ folgt $x=\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{k}\right)$ für $k>0$. Die Punkte haben damit die x-Koordinaten $\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{k}\right)$ und die y-Koordinaten $\frac{1}{k}$.	I	3	
	Für alle Werte von k ist $f_k{}'(0)=k\cdot e^{k\cdot 0}$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f_k an der Stelle 0. Aus $k_1\cdot e^{k_1\cdot 0}\cdot k_2\cdot e^{k_2\cdot 0}=-1$ folgt $k_2=-\frac{1}{k_1}$. Also gibt es für jeden Wert k_1 einen weiteren Wert k_2, sodass sich die zugehörigen Tangenten an der Stelle 0 senkrecht schneiden.	I / II	2	
	Die Gleichungen der Tangenten sind $t_{k3}: y=k_3\cdot x+1$ und $t_{k4}: y=k_4\cdot x+1$. Für die Nullstellen folgt dann: $x_{k3}=-\frac{1}{k_3}$ und $x_{k4}=-\frac{1}{k_4}=2\cdot x_{k3}=-\frac{2}{k_3}$. Also ist k_3 doppelt so groß wie k_4.	I / II	3	
b)	Das Volumen eines Kreiskegels berechnet sich mit $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$. Mit $h=u$ und $G=\pi\cdot(f_k(u))^2=\pi\cdot e^{2\cdot k\cdot u}$ folgt $V_k(u)=\frac{\pi}{3}\cdot u\cdot e^{2\cdot k\cdot u}$ und damit $V_k{}'(u)=\frac{\pi}{3}\cdot(1+2\cdot k\cdot u)\cdot e^{2\cdot k\cdot u}$. Aus $V_k{}'(u)=0$ folgt wegen $e^{2\cdot k\cdot u}>0$ als mögliche Extremstelle $\frac{-1}{2\cdot k}$. Es ist $V_k{}''(u)=\frac{4\cdot k\cdot\pi}{3}\cdot(1+k\cdot u)\cdot e^{2\cdot k\cdot u}$ und mit $k<0$ folgt: $V_k{}''\left(\frac{-1}{2\cdot k}\right)=\frac{2\cdot k\cdot\pi}{3\cdot e}<0$. Für die Punkte P_k ist das Volumen also maximal.	I / II	8	
	Für jeden Kegel entspricht der Radius des Grundkreises der y-Koordinate des Punktes P_k. Damit haben die Kegel mit maximalem Volumen die Radien $f_k\left(\frac{-1}{2\cdot k}\right)=e^{-0{,}5}$. Diese sind unabhängig vom Wert des Parameters k alle gleich.	I	3	

Fortsetzung Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
c)	Die Tangenten verlaufen parallel, wenn ihre Steigungen gleich sind. Mit $f_k'(x) = k \cdot e^{k\cdot x}$ und $g_k'(x) = -k \cdot (k\cdot x + 1) \cdot e^{k\cdot x}$ folgt aus $f_k'(x) = g_k'(x)$ die gesuchte Stelle $-2\cdot k^{-1}$. Die Differenz der y-Achsenabschnitte je zweier paralleler Tangenten t_{fk} und t_{gk} an der Stelle $-2\cdot k^{-1}$ entspricht der Differenz der y-Koordinaten ihrer Berührpunkte mit den zugehörigen Graphen von f_k und g_k. Diese Differenz $g_k(-2\cdot k^{-1}) - f_k(-2\cdot k^{-1}) = e^{-2}$ ist vom Wert von k unabhängig.	II	6	
	Aus $f_k(v_k) = g_k(v_k)$ folgt die Schnittstelle $-k^{-1}$ der Graphen von f_k und g_k. Für den Inhalt der rechten Fläche und den Inhalt der linken Fläche folgt: $A_r = \int_{-k^{-1}}^{0} (f_k(x) - g_k(x))\,dx = \frac{1}{k\cdot e}$ und $A_l = \int_{-2\cdot k^{-1}}^{-k^{-1}} \left(g_k(x) - f_k(x)\right) dx = \frac{1}{e\cdot k} - \frac{2}{k\cdot e^2}$. Das Verhältnis beider Flächeninhalte ist dann $\frac{A_l}{A_r} = \frac{e-2}{e}$ und somit vom Wert des Parameters k unabhängig.	II	7	
	Für jeden Wert von k ist $e^{k\cdot x} > 0$ und somit folgt aus $g_k'(x) = 0$ als einzige Nullstelle $-k^{-1}$. Die Graphen von g_k nehmen also den Steigungswert 0 einmal an. Für $x > -k^{-1}$ ist g_k' streng monoton abnehmend und $g_k'(x) < 0$. Die Graphen von g_k nehmen also jede negative reelle Zahl genau einmal als Steigungswert an. Für $x < -k^{-1}$ ist $g_k'(x) > 0$ und für $x \to -\infty$ gilt $g_k'(x) \to 0$. g_k' nimmt bis zur Maximalstelle $-2\cdot k^{-1}$ streng monoton zu und nimmt danach streng monoton ab. Das Maximum ist $g_k'(-2\cdot k^{-1}) = k\cdot e^{-2}$. Die Graphen von g_k nehmen also die Steigungswerte zwischen 0 und $k\cdot e^{-2}$ genau zweimal und den Wert $k\cdot e^{-2}$ genau einmal an.	II / III	6	
d)	Es ist $\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$ und $\int_0^x (1+t)\,dt = x + \frac{x^2}{2}$. Die Graphen zu e^x und $1+x$ verlaufen beide durch $(0\,\vert\,1)$ mit derselben Steigung. Da der Graph zu e^x linksgekrümmt und der Graph zu $1+x$ eine Gerade ist, muss $e^x > 1+x$ für $x > 0$ gelten. Dann ist auch $\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x (1+t)\,dt$ und damit $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.	II / III	6	
	Summe:		**46**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 2A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Der Spieler erreicht nur dann 12 Punkte nach zwei Würfen, falls er erst eine 2 und dann eine 10 würfelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$.	I	3	
b)	Der Spieler hat genau drei Möglichkeiten zu gewinnen: Wenn der Spieler im ersten Wurf eine 10 erreicht, bekommt er 2 Euro ausgezahlt ($X=2$). Wenn er im ersten und im zweiten Wurf je eine 5 erreicht, bekommt er 4 Euro ausgezahlt ($X=4$). Wenn er in den ersten fünf Würfen jeweils eine 2 erreicht, bekommt er 10 Euro ausgezahlt ($X=10$). Wenn er verliert, bekommt er nichts ausgezahlt ($X=0$). Also kann X nur die vier angegebenen Werte annehmen.	I / II	3	
	Für den Erwartungswert von X folgt: $E(X)=2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{243}=\frac{199}{243}<1$. Das Spiel ist nicht fair, da der zu erwartende Auszahlungsbetrag kleiner als der Einsatz ist.	I / II	3	
	Damit das Spiel fair ist, muss der zu erwartende Auszahlungsbetrag mit dem Einsatz übereinstimmen: $a\cdot\frac{1}{6}+2\cdot a\cdot\frac{1}{9}+5\cdot a\cdot\frac{1}{243}=1$. Daraus folgt $a=\frac{486}{199}$. Da dieser Betrag nicht in ganzen Cent ausgezahlt werden kann, lässt sich der Auszahlungsbetrag nicht so verändern, dass das Spiel fair wird.	II	3	
c)	Für die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Spieler ein Spiel gewinnt, gilt: $p=1-P(X=0)=1-\frac{349}{486}=\frac{137}{486}$. Die Zufallsgröße Y, die die Anzahl der gewonnenen Spiele von 120 Spielen beschreibt, ist binomialverteilt mit den Parametern $n=120$ und $p=\frac{137}{486}$. $P(30\le Y\le 50)=\sum_{k=30}^{50}\binom{120}{k}\cdot\left(\frac{137}{486}\right)^{k}\cdot\left(\frac{349}{486}\right)^{120-k}\approx 0{,}809$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 80,9 %.	I / II	4	
	Wenn das Spiel 19-mal gespielt wird und die Zufallsgröße Z die Anzahl der Spiele beschreibt, die der Spieler gewinnt, dann ist Z binomialverteilt mit den Parametern $n=19$ und $p=\frac{137}{486}$. Also gilt: $P(Z=18)=\binom{19}{18}\cdot\left(\frac{137}{486}\right)^{18}\cdot\left(1-\frac{137}{486}\right)^{19-18}=19\cdot\frac{349}{486}\cdot\left(\frac{137}{486}\right)^{18}$. Mit dem angegebenen Term kann also die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass der Spieler nicht genau 18-mal gewinnt.	II / III	4	

Fortsetzung Aufgabe 2A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ___________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

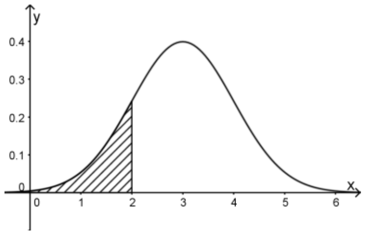
	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
d)	Jede gezogene Kugel ist entweder gelb (g) oder nicht gelb (n). Für das Ereignis E: „Eine der gezogenen Kugeln ist gelb.“ gilt: $P(E)=\frac{1}{3}$. Das Ziehen der beiden Kugeln kann in einem zweistufigen Baumdiagramm dargestellt werden, in dem zwei Pfade ((g,n) und (n,g)) zum Ereignis E gehören. Da es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt, hat jeder dieser beiden Pfade die Pfadwahrscheinlichkeit $\frac{5}{n}\cdot\frac{n-5}{n-1}$, wobei n die unbekannte Anzahl der Kugeln beschreibt. Daraus ergibt sich die Gleichung $2\cdot\frac{5}{n}\cdot\frac{n-5}{n-1}=\frac{1}{3}$.	II / III	4	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 2B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$\Phi_{\mu;\sigma}$ ist die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. $P(X>4)=1-\Phi_{3,2;0,6}(4)\approx 0{,}091$ $P(2{,}2<X<4{,}2)=\Phi_{3,2;0,6}(4{,}2)-\Phi_{3,2;0,6}(2{,}2)\approx 0{,}904$ Die gesuchten Anteile betragen ungefähr 9,1 % und 90,4 %.	I	4	
	$P(u\le X\le 4)=0{,}8$; $\Phi_{3,2;0,6}(4)-\Phi_{3,2;0,6}(u)=0{,}8$; $\Phi_{3,2;0,6}(u)=\Phi_{3,2;0,6}(4)-0{,}8$; $u=\Phi^{-1}_{3,2;0,6}\left(\Phi_{3,2;0,6}(4)-0{,}8\right)\approx 2{,}46$ Die untere Grenze des Zeitintervalls ist ungefähr 2,46 s.	II	5	
b)	$\bar{t}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i=3{,}004$; $s_{10}=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})^2}\approx 0{,}43$ Das arithmetische Mittel der Daten beträgt ungefähr 3 s, die Standardabweichung etwa 0,43 s.	I	4	
	$P(Y<3{,}5)\ge 0{,}8$; $\mu_Y=3{,}0$ Aus dem Ansatz $\Phi_{3,0;\sigma_Y}(3{,}5)=0{,}8$ erhält man unter Einsatz des Rechners $\sigma_Y\approx 0{,}594$. Die Standardabweichung beträgt ungefähr 0,59 s.	II	4	
c)	Skizze der Dichtefunktion für $\mu=3$ und $\sigma=1$  Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht $W(1)=P(Z_1<2)$.	II / III	3	
	Vergleicht man die Graphen der Dichtefunktionen der Normalverteilungen für verschiedene Werte von σ mit $\sigma\ge 1$, so zeigt sich, da der Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen immer 1 beträgt: Für größer werdende Werte von σ wird die Fläche unter dem Graphen im Intervall $[2;4]$ immer kleiner, die Teilfläche für $Z_\sigma<2$ also immer größer. Der Graph von W steigt also monoton. Aufgrund der Symmetrie zum Erwartungswert bleibt der Inhalt der Fläche für $Z_\sigma<2$ immer kleiner als 0,5. Der Wert 0,5 wird also nicht überschritten.	II / III	4	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 3A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$a = 15$ und $b = 17$ Die 0 bedeutet, dass das Fruchtsaftkonzentrat R3 für die Produktion des Fruchtgummitiers Z1 nicht verwendet wird.	I	3	
	Die Anzahlen der benötigten Fruchtgummitiere sind $\begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 17 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 1850 \\ 1600 \end{pmatrix}$. Abzüglich der vorhandenen Fruchtgummitiere ergibt sich für den Rohstoffbedarf $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 12 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1550 - 1000 \\ 1850 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48550 \\ 8550 \\ 6650 \\ 8250 \end{pmatrix}$. Nach Subtraktion der vorhandenen Rohstoffe ergibt sich für die Bestellung $\begin{pmatrix} 48550 \\ 8550 \\ 6650 \\ 8250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46550 \\ 5550 \\ 6650 \\ 8250 \end{pmatrix}$. Es müssen 46550 ME der Grundsubstanz R1 und von den Fruchtsaftkonzentraten 5550 ME R2, 6650 ME R3 und 8250 ME R4 nachbestellt werden.	I / II	6	
b)	Aus $\begin{pmatrix} 13 & 12 & 12 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 17 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 615 & 616 \\ 115 & 116 \\ 65 & 68 \\ 105 & 100 \end{pmatrix}$ entnimmt man die für R4 relevanten Werte 105 und 100. Aus dem Ansatz $\frac{105 \cdot 1{,}1 + 100 \cdot 1{,}18}{105 + 100}$ folgt, dass der Bedarf für den Rohstoff R4 um etwa 14 % zunimmt.	I / II	4	
	z_i entsprechen für $i \in \{1, 2, 3\}$ den Stückzahlen der Fruchtgummitiere Zi. Es gilt $z_1 + z_2 + z_3 = 50$. Aus den Bedingungen und Tabelle 1 folgen die Gleichungen $z_2 + 3 \cdot z_3 = 80$ und $3 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + 2 \cdot z_3 = 109$. Das Gleichungssystem hat die Lösung $z_1 = 9;\ z_2 = \frac{43}{2};\ z_3 = \frac{39}{2}$. Da die Stückzahlen der Fruchtgummitiere nur ganzzahlig sein können, gibt es keine Möglichkeit, eine Tüte des neuen Sortiments unter diesen Bedingungen zusammenzustellen.	II	4	

Fortsetzung Aufgabe 3A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

		AFB	BE 1	BE 2
c)	Aus $\begin{pmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem $\left\lvert\begin{matrix}3\cdot v_1+2\cdot v_2=0\\6\cdot v_1+4\cdot v_2=0\end{matrix}\right\rvert$. Aus dessen Lösung ergeben sich die Vektoren $\vec{v}_k$ mit $\vec{v}_k=k\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.	II	3	
	Aus $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem $\left\lvert\begin{matrix}a\cdot v_1+b\cdot v_2=0\\c\cdot v_1+d\cdot v_2=0\end{matrix}\right\rvert$. Durch Einsetzen erhält man $-\frac{a\cdot d}{c}\cdot v_2+b\cdot v_2=0$. Wegen $v_2\neq 0$ ist die gesuchte Gleichung $-\frac{a\cdot d}{c}+b=0$ bzw. $a\cdot d-b\cdot c=0$.	III	4	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Aufgabe 3B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{8}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ Das Dreieck ist also gleichschenklig mit dem rechten Winkel bei B.	I	4	
	$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $D(0\,\|\,2\,\|\,1)$	I	2	
	$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$; $\cos(\alpha)=\dfrac{\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{8}{\sqrt{29}\cdot 4}$. Also gilt $\alpha\approx 68{,}2°$.	I	3	
b)	Ein beliebiger Punkt T_r auf $\overline{AS}$ hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OT_r}=\begin{pmatrix}2\\2\cdot r\\1+5\cdot r\end{pmatrix}$ mit $0\le r\le 1$. $\overrightarrow{CT_r}=\begin{pmatrix}0\\2\cdot r-4\\5\cdot r\end{pmatrix}$ Die Gleichung $\left\|\overrightarrow{CT_r}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\2\cdot r-4\\5\cdot r\end{pmatrix}\right\|=4{,}5$ hat zwei Lösungen r_1 und r_2 mit $r_1\approx-0{,}2$ und $r_2\approx 0{,}7$. Da $0\le r_2\le 1$ gilt, gibt es einen solchen Punkt auf $\overline{AS}$.	II	4	
	Teilt P die Strecke $\overline{SA}$ und Q die Strecke $\overline{SB}$ im angegebenen Verhältnis, so gilt: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OS}+\frac{a}{a+b}\cdot\overrightarrow{SA}=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}+\frac{a}{a+b}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OS}+\frac{a}{a+b}\cdot\overrightarrow{SB}=\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}+\frac{a}{a+b}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PQ}=\frac{a}{a+b}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\frac{a}{a+b}\cdot\sqrt{8}$. Damit ist der Flächeninhalt des aus den Teilungspunkten gebildeten Quadrates $8\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.	II / III	4	

Fortsetzung Aufgabe 3B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: ____________

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
c)	Eine Gleichung der Ebene, in der die Punkte B, C und S liegen, lautet: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BC} + t \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Das Lösen des Gleichungssystems $\left\| \begin{array}{ccccccc} x & = & 4 & - & 2 \cdot s & - & 2 \cdot t \\ x & = & 2 & + & 2 \cdot s & + & 0 \cdot t \\ x & = & 1 & + & 0 \cdot s & + & 5 \cdot t \end{array} \right\|$ liefert $x = \frac{8}{3}; s = \frac{1}{3}; t = \frac{1}{3}$. Der Punkt $X\left(\frac{8}{3} \middle\| \frac{8}{3} \middle\| \frac{8}{3}\right)$ hat drei gleiche Koordinaten und liegt in der Ebene E.	II	4	
	Damit es einen solchen Punkt in einer Ebene gibt, müssen die Ebene und die Gerade $g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Bei Ebenen parallel zu g, die g nicht enthalten, gibt es keinen solchen Punkt. Also hat nicht jede Ebene einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten.	III	3	
	Summe:		**24**	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Zum **Erwartungshorizont**:

Der Erwartungshorizont skizziert mögliche Lösungswege. Je nach gewähltem Lösungsansatz sind häufig auch alternative Bearbeitungen der Aufgabenstellungen denkbar, die bei fachlicher Richtigkeit und angemessener Berücksichtigung der Operatoren mit entsprechenden Bewertungseinheiten zu bewerten sind.
Die rechts stehenden Bewertungseinheiten sind jedoch verbindlich. Bei der Korrektur, Bewertung und Beurteilung sind die Bemerkungen gemäß der EPA Mathematik vom 24.05.2002 (Abschnitt 3.5 Bewertung von Prüfungsleistungen) zu beachten.

Folgender **Bewertungsmaßstab** ist bezogen auf die Gesamtzahl von 120 BE anzuwenden:

Ab Prozent	**95**	**90**	**85**	**80**	**75**	**70**	**65**	**60**	**55**	**50**	**45**	**40**	**34**	**28**	**20**	**00**
Punkte	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**09**	**08**	**07**	**06**	**05**	**04**	**03**	**02**	**01**	**00**