Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 94 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 120 BE erreichbar.
Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (46 BE)	Block 2 Stochastik (24 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (24 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

In einem Betrieb wird im Produktionsprozess ein Gas verbraucht. Dazu wird das benötigte Gas durch eine Leitung aus dem Gastank in die Produktionsstätte geleitet. Das hierbei pro Zeit durch die Leitung strömende Gas wird als Gasstrom bezeichnet. Dieser wird in Litern pro Stunde $\left(\frac{L}{h}\right)$ gemessen, die Zeit in Stunden (h). Der Arbeitstag in dem Betrieb dauert 14 Stunden, am Ende des Arbeitstages wird das Ventil des Gastanks geschlossen.

Es wird eine Langzeitmessung durchgeführt, die folgende Werte ergibt:

Zeit in h nach Beginn des Arbeitstages	0	4	6	10
Gasstrom in $\frac{L}{h}$	2000	3140	1500	1440

2 Stunden und 12,2 Stunden nach Arbeitsbeginn treten Spitzenwerte im Gasstrom auf.
Für das aus diesen Werten entwickelte Modell wird die Funktion f mit
$f(t) = -3\cdot t^4 + 88\cdot t^3 - 816\cdot t^2 + 2304\cdot t + 2000,\ 0 \le t \le 14$, verwendet.

Dabei wird t in h und f(t) in $\frac{L}{h}$ angegeben.

Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Arbeitstages.

a) Der Betriebsleiter stimmt der Nutzung des Modells unter folgenden Bedingungen zu:
- Die mit dem Modell berechneten Werte weichen nicht mehr als 5 % von den Tabellenwerten ab.
- Die Zeitpunkte der mit dem Modell berechneten Spitzenwerte weichen nicht mehr als 15 Minuten von den Zeitpunkten der Spitzenwerte der Messung ab.

Weisen Sie nach, dass mit der Funktion f die Bedingungen des Betriebsleiters erfüllt werden und f somit für die folgenden Berechnungen genutzt werden kann.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt zwischen den Zeitpunkten der Spitzenwerte im Gasstrom, an dem der Gasstrom am stärksten abnimmt.

Berechnen Sie die Gesamtzeit im Laufe eines Arbeitstages, in welcher der Gasstrom mindestens $1500\,\frac{L}{h}$ beträgt. (14 BE)

Das Gas wird für den Verbrauch in einem Tank gespeichert. Dem Tank können $15\,600\,L$ Gas entnommen werden. Über eine Anzeige wird das noch entnehmbare Gasvolumen in Prozent angezeigt.

b) Zu Beginn eines Arbeitstages ist der Tank vollständig gefüllt, die Anzeige zeigt 100 % an. Begründen Sie, dass das für die Produktion zu einem Zeitpunkt x nach Arbeitsbeginn noch entnehmbare Gasvolumen durch die Funktion g mit

$g(x) = 15\,600 - \int_0^x f(t)\,dt$, x in h, g(x) in L, beschrieben werden kann.

Der Tank muss aufgefüllt werden, sobald die Anzeige 20 % anzeigt.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beginns dieses Auftankvorgangs. (7 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A

c) Zu Beginn eines Arbeitstages ist der Tank vollständig gefüllt. Gleichzeitig mit dem Verbrauch des Gases wird der Tank mit einem konstanten Gasstrom von $2000\,\frac{\text{L}}{\text{h}}$ befüllt.

Bestimmen Sie die Zeiträume, in denen das dem Tank entnehmbare Gasvolumen ab- bzw. zunimmt.

Zeigen Sie, dass es keinen über den ganzen Arbeitstag konstanten Gasstrom gibt, bei dem der Gastank am Ende des Arbeitstages wieder vollständig gefüllt ist.

Zu Beginn eines anderen Arbeitstages sind im Tank nur noch $3120\,\text{L}$ enthalten. Die Betankung erfolgt wieder gleichzeitig mit dem Verbrauch des Gases.
Bestimmen Sie den konstanten Gasstrom, mit dem die Betankung erfolgt, wenn der Tank nach 30 Minuten gefüllt ist. (10 BE)

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = \frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{1}{2}\cdot(k+1)\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot k\cdot x^2,\; x\in\mathbb{R},\; k\in\mathbb{R}$, gegeben.

Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass gilt: $f_k''(x) = 3\cdot(x-1)\cdot(x-k)$.

In der Abbildung der Anlage sind zwei Graphen für $k=0$ und $k=1$ dargestellt.
Entscheiden Sie, welcher der beiden Graphen zu dem Parameterwert $k=0$ gehört.

Entscheiden Sie, ob es einen Wert für k gibt, sodass der Graph von f_k symmetrisch zur y-Achse ist.

Die Graphen von f_k besitzen Wendepunkte.

Bestimmen Sie die Gleichungen derjenigen Kurven, auf denen diese Wendepunkte liegen können.

Für eine ganzrationale Funktion h soll gleichzeitig gelten:
- An der Stelle $x=2$ hat die zweite Ableitungsfunktion h'' eine Nullstelle.
- Die Stelle $x=2$ ist weder eine Wendestelle noch eine Extremstelle von h.

Leiten Sie ausgehend von einem Term für h'' eine Gleichung der Funktion h her. (15 BE)

Material

Anlage

Graphen zu Teilaufgabe d)

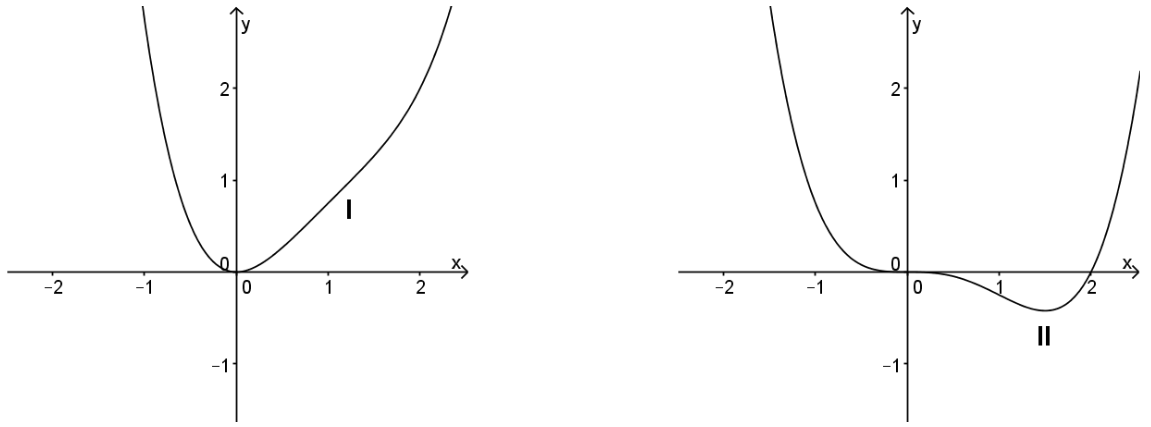


Abbildung: Graphen von f_k für $k=0$ und $k=1$

Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = e^{k \cdot x}, x \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

a) Die Abbildung in der Anlage zeigt die Graphen der Funktionen f_k für $k = -1$ und $k = 0{,}5$.
Entscheiden Sie, welche der Funktionen zu welchem Graphen gehört.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die jeweiligen Tangenten an die Graphen von f_k die Steigung 1 haben.
Für jeden Wert von k bezeichnet t_k die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $(0|1)$.
Zeigen Sie, dass es zu jedem Parameter k_1 einen davon verschiedenen Parameter k_2 gibt, sodass sich die Tangenten t_{k1} und t_{k2} senkrecht schneiden. Ohne Nachweis können Sie verwenden: Wenn für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden die Beziehung gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$, dann stehen die zugehörigen Geraden senkrecht aufeinander.
Jede Tangente t_k hat eine Nullstelle. Die Nullstelle der Tangente t_{k3} wird mit x_{k3} bezeichnet und die Nullstelle der Tangente t_{k4} wird mit x_{k4} bezeichnet.
Begründen Sie, dass der Wert von k_3 doppelt so groß ist wie der Wert von k_4, wenn x_{k3} halb so groß ist wie x_{k4}. (10 BE)

b) Die Funktionen f_k werden nun mit den folgenden Bedingungen betrachtet: $x \geq 0$ und $k < 0$.
Für jeden Wert von k wird dem Graphen von f_k ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben. Für eine Stelle $u > 0$ sind $O(0|0)$, $Q(u|0)$ und $P_k(u|f_k(u))$ die Eckpunkte. Bei Rotation dieser Dreiecke um die x-Achse entstehen Kegel.
Zeigen Sie, dass diese Kegel für $P_k\left(\frac{-1}{2 \cdot k} \middle| f_k\left(\frac{-1}{2 \cdot k}\right)\right)$ maximales Volumen haben.
Untersuchen Sie, ob die Kegel mit dem maximalen Volumen für jeden Wert des Parameters k denselben Grundkreisradius haben. (11 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1B

c) Es werden nun die Funktionen f_k sowie die Funktionen g_k mit demselben Parameter k und der Gleichung $g_k(x) = -k \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ mit den folgenden Bedingungen betrachtet: $x \leq 0$ und $k > 0$.
Für jeden Wert von k und jede Stelle x_k bezeichnet t_{fk} die Tangente an den Graphen von f_k und t_{gk} die Tangente an den Graphen von g_k an dieser Stelle x_k. Es gibt eine Stelle, an der die Tangenten t_{fk} und t_{gk} jeweils parallel zueinander verlaufen.
Zeigen Sie, dass die Differenz der y-Achsenabschnitte dieser jeweils parallelen Tangenten unabhängig vom Wert von k ist.
Für jeden Wert von k schneiden sich die Graphen von f_k und g_k an einer Stelle v_k und begrenzen zwei Flächen: Eine liegt rechts von v_k und wird rechts von der y-Achse begrenzt und eine liegt links von v_k und wird links von der Geraden zu $x = -\frac{2}{k}$ begrenzt.
Untersuchen Sie, ob das Verhältnis der Inhalte beider Flächen vom Wert des Parameters k abhängt.
Die Funktionen g_k werden nun für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $k > 0$ betrachtet.
Entscheiden Sie, welche Steigungswerte die Graphen von g_k genau einmal und welche Steigungswerte sie genau zweimal annehmen. (19 BE)

d) Begründen Sie ausgehend von den Integralen $\int_0^x e^t \, dt$ und $\int_0^x (1+t) \, dt$, dass für $x > 0$ gilt:

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$. (6 BE)

Material

Anlage

Graphen zur Teilaufgabe a)

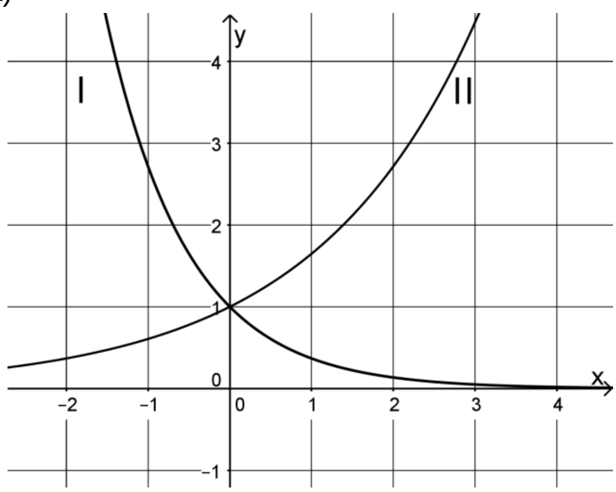


Abbildung: Graphen von f_k für $k = -1$ und $k = 0{,}5$

Aufgabe 2A

Das Spiel „Die goldene Zehn“ wird mit einem idealen Würfel gespielt, bei dem eine Seitenfläche mit einem „V“, zwei Seitenflächen mit einer „2“, zwei mit einer „5“ und eine mit einer „10“ bedruckt sind. Es gelten folgende Spielregeln:

- Zu Beginn eines Spiels beträgt die Punktzahl des Spielers null.
- Zeigt der Würfel nach einem Wurf eine Zahl, wird diese zur bisherigen Punktzahl addiert.
- Der Spieler gewinnt, wenn er genau die Punktzahl 10 erreicht.
- Er verliert, wenn er eine Punktzahl größer als 10 erreicht oder ein „V“ würfelt.
- Das Spiel ist beendet, wenn der Spieler gewonnen oder verloren hat.

Der Spieler zahlt vor dem Spiel einen Einsatz von einem Euro an den Spielleiter. Gewinnt der Spieler, so bekommt er pro Wurf in diesem Spiel zwei Euro ausgezahlt.

a) Das Spiel wird einmal gespielt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit zwei Würfen die Punktzahl 12 erreicht. (3 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt den an den Spieler ausgezahlten Betrag in Euro.
Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	2	4	10
$P(X=k)$	$\frac{349}{486}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{243}$

b) Begründen Sie, dass X nur die Werte 0, 2, 4 oder 10 annehmen kann.
Begründen Sie, dass das Spiel nicht fair ist.
Untersuchen Sie, ob bei unverändertem Einsatz von einem Euro der Auszahlungsbetrag pro Wurf so verändert werden kann, dass das Spiel fair wird. (9 BE)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler von 120 Spielen mindestens 30 und höchstens 50 gewinnt.
Erläutern Sie, welche Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang des Spiels „Die goldene Zehn“ mit dem Term
$1-19\cdot\frac{349}{486}\cdot\left(\frac{137}{486}\right)^{18}$ berechnet werden kann. (8 BE)

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist über eine Urne Folgendes bekannt:
- In der Urne befinden sich neben anderen Kugeln genau fünf gelbe Kugeln.
- Es werden zwei Kugeln gleichzeitig aus der Urne gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, genau eine gelbe Kugel zu erhalten, beträgt $\frac{1}{3}$.

Leiten Sie eine Gleichung zur Bestimmung der Anzahl aller Kugeln in der Urne her. (4 BE)

Aufgabe 2B

Im Zusammenhang mit der Veröffentlichung eines neuen Spiels im Internet werden Simulationen durchgeführt, bei denen die vom Anbieter bereitzustellenden Rechnerkapazitäten untersucht werden. Dabei wird auch berücksichtigt, wieviel Zeit ein Benutzer bis zu einer bestimmten Reaktion benötigt. Diese Zeit wird Reaktionszeit genannt und in Sekunden (s) gemessen.

a) Für diese bestimmte Reaktion wird eine erste Simulation durchgeführt. Dazu wird die Reaktionszeit als normalverteilte Zufallsgröße X angenommen. Eine Schätzung liefert den Erwartungswert $\mu_X = 3{,}2$ und die Standardabweichung $\sigma_X = 0{,}6$.

Bestimmen Sie
- den Anteil der Reaktionszeiten, die länger als 4 s dauern,
- den Anteil der Reaktionszeiten, deren Abweichung vom Erwartungswert kleiner als 1 s ist,
- die untere Grenze eines Zeitintervalls, in dem 80 % der Zeiten liegen und dessen obere Grenze 4 s beträgt. (9 BE)

b) Nach der Veröffentlichung dieses Spiels werden Reaktionszeiten gemessen. Gegeben ist hier ein Auszug von 10 Messdaten:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit in s	3,18	3,02	2,95	3,18	4,04	2,80	2,64	2,41	2,64	3,18

Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung für diese Daten.

Anhand aller gemessenen Daten soll ein zweites Modell für weitere Simulationen entwickelt werden. Dazu soll die Reaktionszeit als normalverteilte Zufallsgröße Y mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 3{,}0$ beschrieben werden. Außerdem sollen mindestens 80 % der Reaktionszeiten unterhalb von 3,5 s liegen.
Bestimmen Sie die größte Standardabweichung auf 0,01 s genau, für die dies gilt. (8 BE)

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang werden im Folgenden normalverteilte Zufallsgrößen Z_σ mit dem Erwartungswert $\mu = 3$ betrachtet. Die Funktion W gibt für Werte der Standardabweichung σ mit $\sigma > 0$ die Wahrscheinlichkeit $P(Z_\sigma \leq 2)$ an.
Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen von W.
Erläutern Sie den Wert W(1) mithilfe einer Skizze des Graphen der zugehörigen Dichtefunktion der Normalverteilung.
Erläutern Sie unter Bezug auf die Graphen der Dichtefunktionen der zugehörigen Normalverteilungen, dass der Graph von W für $\sigma > 1$ monoton steigt, aber unterhalb der Geraden zu $y = 0{,}5$ liegt. (7 BE)

Fortsetzung Aufgabe 2B

Material

Anlage

Graph zu Teilaufgabe c)

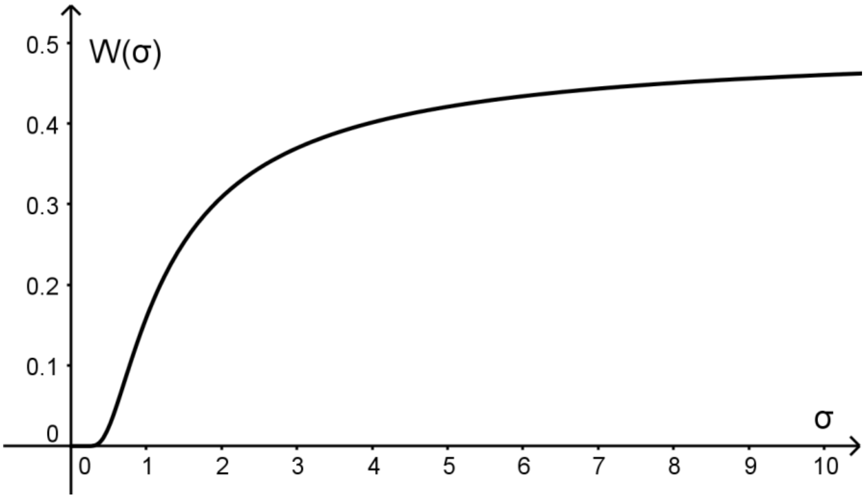


Abbildung: Graph von W

Aufgabe 3A

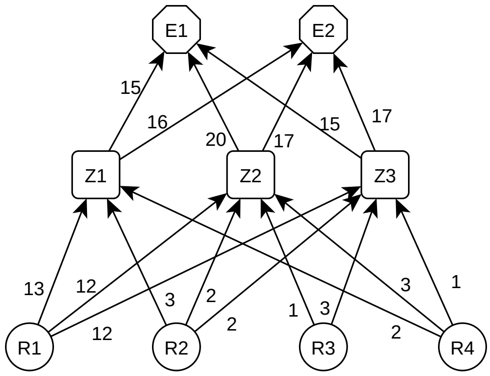
Ein Betrieb stellt Fruchtgummi aus einer Grundsubstanz R1 und drei Fruchtsaftkonzentraten R2, R3 und R4 her. Es entstehen drei Sorten einzelner Fruchtgummitiere Z1, Z2 und Z3. Unterschiedliche Zusammensetzungen aus den drei Sorten ergeben die in Tüten verpackten Sortimente E1 und E2. Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Grundsubstanz und der Fruchtsaftkonzentrate für je ein Fruchtgummitier bzw. wie viel Stück der Fruchtgummitiere für je eine Tüte der jeweiligen Sortimente benötigt werden. Der dargestellte Übergangsgraph verdeutlicht den Produktionsprozess.

	Z1	Z2	Z3
R1	13	12	12
R2	3	2	2
R3	0	1	3
R4	2	3	1

Tabelle 1

	E1	E2
Z1	a	16
Z2	20	b
Z3	15	17

Tabelle 2



a) Geben Sie die fehlenden Werte für a und b aus Tabelle 2 an.

Erläutern Sie die Bedeutung des Eintrags 0 in Tabelle 1 im Sachzusammenhang.

Im Lager befinden sich noch 2000 ME der Grundsubstanz R1, 3000 ME des Fruchtsaftkonzentrats R2 und 1000 Stück der Fruchtgummitiere Z1. Es sollen 50 Tüten des Sortiments E1 und 50 Tüten des Sortiments E2 produziert werden. Dabei sollen alle vorhandenen Materialien vollständig verwendet werden.
Bestimmen Sie die ME der Grundsubstanz und die ME aller Fruchtsaftkonzentrate, die für diese Produktion nachbestellt werden müssen. (9 BE)

b) Bisher wurden von den Tüten der Sortimente E1 und E2 gleich viele produziert. Die Produktion der Tüten des Sortiments E1 soll um 10 % und die Produktion der Tüten von Sortiment E2 soll um 18 % gesteigert werden.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Bedarf für das Fruchtsaftkonzentrat R4 steigt.

Eine Tüte eines neuen Sortiments E3 soll unter folgenden Bedingungen zusammengestellt werden:

- Sie enthält insgesamt 50 Stück der Fruchtgummitiere Z1, Z2 und Z3,
- es werden genau 109 ME des Fruchtsaftkonzentrats R2 und 80 ME des Fruchtsaftkonzentrats R3 verwendet,
- von der Grundsubstanz R1 und dem Fruchtsaftkonzentrat R4 stehen beliebig viele ME zur Verfügung.

Untersuchen Sie, ob eine Tüte des neuen Sortiments E3 unter diesen Bedingungen zusammengestellt werden kann. (8 BE)

Fortsetzung Aufgabe 3A

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $v_1, v_2 \neq 0$ gegeben.

Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{v}$, die die folgende Gleichung lösen: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

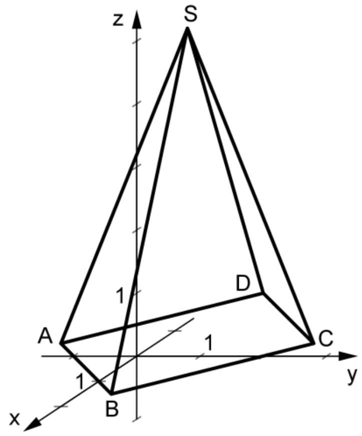
Damit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $v_1, v_2 \neq 0$ Lösungen hat, müssen $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unabhängig von v_1 und v_2 eine Bedingung erfüllen, die als Gleichung formuliert werden kann.

Leiten Sie diese Gleichung her. Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist. (7 BE)

Aufgabe 3B

Von einer Pyramide sind folgende Eckpunkte gegeben:

$A(2\,|\,0\,|\,1)$, $B(4\,|\,2\,|\,1)$, $C(2\,|\,4\,|\,1)$ und $S(2\,|\,2\,|\,6)$.



a) Zeigen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt B.

Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Punktes D so, dass A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrats sind.

Berechnen Sie den Winkel zwischen der Strecke $\overline{AS}$ und der Diagonalen $\overline{AC}$. (9 BE)

b) Untersuchen Sie, ob es Punkte auf der Strecke $\overline{AS}$ gibt, die zu C den Abstand 4,5 haben.

Auf jeder Seitenkante der Pyramide gibt es einen Punkt, der die Strecke von S zum jeweiligen Eckpunkt im Verhältnis $a:b$ teilt. Diese Punkte bilden ein Quadrat. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats. (8 BE)

c) Die Punkte B, C und S liegen in einer Ebene E.
Zeigen Sie, dass es in der Ebene E einen Punkt gibt, der drei gleiche Koordinaten hat und geben Sie dessen Koordinaten an.

Untersuchen Sie, ob jede beliebige Ebene einen Punkt hat, der drei gleiche Koordinaten hat. (7 BE)