

## Hinweise für Lehrkräfte

Die Angaben zu Hilfsmitteln, Aufgabenauswahl und Gewichtung im Wahlteil sind den folgenden Hinweisen zu entnehmen, die auch die Prüflinge erhalten:

## Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

### Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (34 BE)	Block 2 Stochastik (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

**Andere Kombinationen sind nicht zulässig.**

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 175 Minuten

### Hilfsmittel für den Wahlteil

- Zeichenmittel
- eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
- von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Zentralabitur 2016	Mathematik	Lehrermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 Gymnasium Gesamtschule

## Aufgabe 1A

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Abweichung zu den angegebenen Zeitpunkten:  <math>\frac{f(0)-2000}{2000} = 0</math>; <math>\frac{f(4)-3140}{3140} \approx -0,037</math>; <math>\frac{f(6)-1500}{1500} \approx 0,045</math>; <math>\frac{f(10)-1440}{1440} = 0</math></p> <p>Für Zeitpunkte der Spitzenwerte muss gelten: <math>f'(t_S) = 0</math>.  Die Bedingung liefert: <math>t_{S1} = 2</math>; <math>t_{S2} = 8</math>; <math>t_{S3} = 12</math>.  Da gilt: <math>f''(2) = -720</math>; <math>f''(12) = -480</math>; <math>f''(8) = 288</math>, liegen nur für <math>t_{S1}</math> und <math>t_{S3}</math> Spitzenwerte vor. Die Abweichung beträgt für <math>t_{S1}</math> 0 h und für <math>t_{S3}</math> 0,2 h, das ist in beiden Fällen weniger als 15 Minuten.  Damit sind alle Bedingungen erfüllt.</p> <p>Zum Zeitpunkt der stärksten Abnahme hat f eine Wendestelle.  Die Gleichung <math>f'(t_W) = 0</math> hat im gegebenen Intervall die Lösungen <math>t_{W1}</math> mit <math>t_{W1} \approx 4,43</math> und <math>t_{W2}</math> mit <math>t_{W2} \approx 10,24</math>. Aufgrund der zuvor bestimmten Maximal- und Minimalstellen ist der Zeitpunkt der stärksten Abnahme durch die erste Wendestelle gegeben. Dieser Zeitpunkt liegt also etwa 4,43 Stunden nach Arbeitsbeginn.</p> <p>Aus dem Ansatz <math>f(t) = 1500</math> ergibt sich, dass der Gasstrom ungefähr 6,12 h, 10,16 h und 13,26 h nach Arbeitsbeginn <math>1500 \frac{L}{h}</math> beträgt. Zwischen Arbeitsbeginn und etwa 6,12 h sowie zwischen den beiden anderen Zeitpunkten beträgt der Gasstrom mindestens <math>1500 \frac{L}{h}</math>. Der Gesamtzeitraum ist also ungefähr 9,22 h lang.</p>	I / II	6	
		I / II	4	
		I / II	4	
b)	<p><math>\int_0^1 f(t) dt \approx 2900</math></p> <p>In der ersten Stunde werden ungefähr 2900 L Gas entnommen.</p> <p>Aus dem gefüllten Tank können 15600 L Gas entnommen werden. Zu einem Zeitpunkt x gibt das Integral die schon entnommene Gasmenge an, die von der Anfangsmenge subtrahiert werden muss.</p> <p>20 % von 15600 L sind 3120 L.</p> <p>Der Ansatz <math>15600 - \int_0^a f(t) dt = 3120</math> liefert drei Werte <math>a_1</math>, <math>a_2</math> und <math>a_3</math>.</p> <p>Nur der Wert <math>a_2</math> mit <math>a_2 \approx 3,51</math> liegt innerhalb des Intervalls <math>[0;14]</math>.</p> <p>Nach etwa 3,5 Stunden muss der erste Auftankvorgang beginnen.</p>	I	2	
		I / II	3	
		I / II	4	

Zentralabitur 2016	Mathematik	Lehrermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 Gymnasium Gesamtschule

## Fortsetzung Aufgabe 1A

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
c)	<p>Zu dem Parameterwert <math>-1</math> gehört der Graph I. Begründung beispielsweise über <math>f_{-1}(1) = -2,75</math>.</p> <p>Für den Parameterwert <math>0</math> ergibt sich <math>f_0(x) = \frac{3}{4} \cdot x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^2</math>. Da in dem Funktionsterm der ganzrationalen Funktion nur gerade Exponenten auftreten, ist der zugehörige Graph symmetrisch zur y-Achse.</p> <p>Für <math>k \neq 1</math> und <math>k \neq -1</math> hat die erste Ableitung drei verschiedene Nullstellen, an denen jeweils ein Vorzeichenwechsel vorliegt. An diesen Stellen liegt jeweils eine Extremstelle vor.</p> <p>Ist <math>k = 1</math> oder <math>k = -1</math>, so hat die erste Ableitung nur eine Nullstelle, an der ein Vorzeichenwechsel vorliegt, sowie eine zweite, an der kein Vorzeichenwechsel vorliegt. Der Graph hat also einen Extrempunkt und einen Punkt mit waagerechter Tangente, in dem sich sein Monotonieverhalten aber nicht ändert. Es liegt also eine Sattelstelle und damit eine Wendestelle vor.</p>	I	2	
		II	2	
		II	2	
		III	5	
	<b>Summe:</b>		<b>34</b>	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				



Zentralabitur 2016	Mathematik	Lehrermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 Gymnasium Gesamtschule

## Fortsetzung Aufgabe 1B

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

c)	Es gilt $\int_{-1}^0 (f(x) - h(x)) dx = e - 2$ .	I / II	2
	Damit ist der Inhalt der Fläche $e - 2$ Flächeneinheiten.		
	Verglichen werden die Terme der Ableitungen $f'(x) = -e^{-x}$ und $h'(x) = -e^{-x} + x \cdot e^{-x}$ .	II / III	4
Aus $x < 0$ und $e^{-x} > 0$ folgt $x \cdot e^{-x} < 0$ .			
Damit fällt der Graph von $h$ stärker als der Graph von $f$ . Es kann kein weiterer Schnittpunkt existieren.			
Der Graph von $h$ verläuft nur links von der Nullstelle oberhalb der $x$ -Achse und fällt dort streng monoton. Deshalb kommen für diese Stellen die zugehörigen Funktionswerte nur einmal vor.	II / III	4	
Von der Nullstelle bis zur Minimalstelle fällt der Graph von $h$ streng monoton, danach steigt er streng monoton und nähert sich asymptotisch der $x$ -Achse.			
Daher wird der Funktionswert 0 nur einmal angenommen und die Funktionswerte der Stellen rechts von der Nullstelle werden bis auf das Minimum zweimal angenommen.			
Also werden für die Nullstelle, die Minimalstelle und Stellen links von der Nullstelle die zugehörigen Funktionswerte nur einmal angenommen.	II / III	4	
<b>Summe:</b>			<b>34</b>
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.			

Zentralabitur 2016	Mathematik	Lehrermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 2 Gymnasium Gesamtschule

## Aufgabe 2A

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	Der Spieler erreicht nur dann 12 Punkte nach zwei Würfeln, falls er erst eine 2 und dann eine 10 würfelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ .	I	3	
b)	Der Spieler hat genau drei Möglichkeiten zu gewinnen: Wenn der Spieler im ersten Wurf eine 10 erreicht, bekommt er 2 Euro ausgezahlt ( $X = 2$ ). Wenn er im ersten und im zweiten Wurf je eine 5 erreicht, bekommt er 4 Euro ausgezahlt ( $X = 4$ ). Wenn er in den ersten fünf Würfeln jeweils eine 2 erreicht, bekommt er 10 Euro ausgezahlt ( $X = 10$ ). Wenn er verliert, bekommt er nichts ausgezahlt ( $X = 0$ ). Also kann $X$ nur die vier angegebenen Werte annehmen.  Für den Erwartungswert von $X$ folgt: $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{243} = \frac{199}{243} < 1$ .  Das Spiel ist nicht fair, da der zu erwartende Auszahlungsbetrag kleiner als der Einsatz ist.	I / II	3	
c)	Die Zufallsgröße $Y$ , die die Anzahl der gewonnenen Spiele von 120 Spielen beschreibt, ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 120$ und $p = \frac{137}{486}$ .  $P(Y \geq 40) = \sum_{k=40}^{120} \binom{120}{k} \cdot \left(\frac{137}{486}\right)^k \cdot \left(\frac{349}{486}\right)^{120-k} \approx 0,126$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 12,6 %. Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass der Spieler von 19 Spielen genau 18 gewinnt.	I / II	2	
d)	Der Spieler gewinnt ein Spiel mit höchstens zwei Würfeln, falls er im ersten Wurf eine 10 erreicht oder im ersten und zweiten Wurf jeweils eine 5 erreicht. Für die Wahrscheinlichkeit $p$ dieses Ereignisses gilt: $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ . Die Zufallsgröße $G$ , die die Anzahl der Spiele beschreibt, die der Spieler mit höchstens zwei Würfeln gewinnt, ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = \frac{5}{18}$ .  Daraus folgt: $P(G \geq 5) = \sum_{k=5}^{20} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^k \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{20-k} \approx 0,690$ . Also ist die zu untersuchende Wahrscheinlichkeit kleiner als 70 %.	II / III	4	
<b>Summe:</b>			<b>17</b>	
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.				

Zentralabitur 2016	Mathematik	Lehrermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 2 Gymnasium Gesamtschule

## Aufgabe 2B

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Für die binomialverteilte Zufallsgröße <math>X</math> gilt: <math>n = 160</math> und <math>p = 0,1</math>.</p> $P(X = 16) = \binom{160}{16} \cdot 0,1^{16} \cdot 0,9^{144} \approx 0,105$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 160 Kühen genau 16 Kühe den Inhaltsstoff in der Milch haben, beträgt etwa 10,5 %.</p> $P(X \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} \binom{160}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{160-k} \approx 0,880$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 160 Kühen höchstens 20 Kühe den Inhaltsstoff in der Milch haben, beträgt etwa 88,0 %.</p> <p>Es sind <math>\mu = 16</math> und <math>\sigma = 3,794\dots</math>. Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt.</p> <p>Der Ansatz <math>[\mu - 1,96 \cdot \sigma; \mu + 1,96 \cdot \sigma]</math> liefert für die 95 %-Umgebung die Intervallgrenzen 8,56... und 23,43...</p> <p>Da <math>P(9 \leq X \leq 23) \approx 0,954</math> und <math>P(10 \leq X \leq 22) \approx 0,915</math> gilt, erfüllt das Intervall <math>[9; 23]</math> die Forderung.</p>	I	4	
		I / II	4	
b)	<p>Das Gemisch enthält den Inhaltsstoff, falls in mindestens einer Probe der Inhaltsstoff enthalten ist. Für die Zufallsgröße <math>Y</math> mit <math>n = 20</math> und <math>p = 0,1</math> gilt:</p> $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,9^{20} \approx 0,878$ <p>Also beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 87,8 %.</p> <p>Werden 20 Milchproben untersucht, so gilt: Enthält das Gemisch den Inhaltsstoff nicht, ist nur eine Untersuchung notwendig. Enthält das Gemisch den Inhaltsstoff, so müssen 21 Untersuchungen durchgeführt werden. Für die zu erwartende Anzahl an Untersuchungen folgt damit:</p> $1 \cdot P(Y = 0) + 21 \cdot P(Y \geq 1) = 0,9^{20} + 21 \cdot (1 - 0,9^{20}) = 21 - 20 \cdot 0,9^{20} \approx 18,6$ <p>Also sind 19 Untersuchungen zu erwarten.</p> <p>Bei <math>n</math> Milchproben folgt für die zu erwartende Anzahl an Untersuchungen:</p> $n + 1 - n \cdot 0,9^n$ <p>Für die Gleichung <math>n + 1 - n \cdot 0,9^n = n</math> mit <math>n \geq 2</math> ergibt sich mithilfe der Rechnerfunktionen <math>n = 33,2\dots</math></p> <p>Also sind bis zur Anzahl von 33 Milchproben bei diesem Verfahren weniger Untersuchungen zu erwarten.</p>	II	3	
		II	3	
		III	3	
<b>Summe:</b>			<b>17</b>	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				





### Aufgabe 3B

### Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: \_\_\_\_\_

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	$\overline{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};  \overline{BA}  =  \overline{BC}  = \sqrt{8}; \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$ <p>Das Dreieck ist also gleichschenkelig mit dem rechten Winkel bei B.</p> $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; D(0 2 1)$	I	4	
b)	<p>Mit <math>\overline{AS}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ z-1 \end{pmatrix}</math> und <math>\overline{CS}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ z-1 \end{pmatrix}</math> folgt aus <math>\overline{AS}_z \cdot \overline{CS}_z = 0: -4 + (z-1)^2 = 0</math>.</p> <p>Diese Gleichung hat die Lösung: <math>z = 3</math> oder <math>z = -1</math>. Es gibt also zwei verschiedene Punkte, die mit A und C jeweils ein rechtwinkliges Dreieck bilden.</p>	II	4	
c)	<p>Eine Gleichung der Ebene, in der die Punkte B, C und S liegen, lautet:</p> $E: \vec{x} = \overline{OB} + s \cdot \overline{BC} + t \cdot \overline{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$ <p>Das Lösen des Gleichungssystems <math>\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot s - 2 \cdot t \\ x = 2 + 2 \cdot s + 0 \cdot t \\ x = 1 + 0 \cdot s + 5 \cdot t \end{cases}</math> liefert</p> $x = \frac{8}{3}; s = \frac{1}{3}; t = \frac{1}{3}.$ <p>Der Punkt <math>X\left(\frac{8}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{8}{3}\right)</math> hat drei gleiche Koordinaten und liegt in der Ebene E.</p> <p>Damit es einen solchen Punkt in einer Ebene gibt, müssen die Ebene und die Gerade <math>g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}</math> mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Bei Ebenen parallel zu g, die g nicht enthalten, gibt es keinen solchen Punkt. Also hat nicht jede Ebene einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten.</p>	II	4	
<b>Summe:</b>			<b>17</b>	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				

<b>Zentralabitur 2016</b>	<b>Mathematik</b>	<b>Lehrermaterial</b>
<b>Pflichtteil / Wahlteil</b>	<b>gA</b>	<b>Bewertung</b>
		<b>Gymnasium Gesamtschule</b>

Zum **Erwartungshorizont**:

Der Erwartungshorizont skizziert mögliche Lösungswege. Je nach gewähltem Lösungsansatz sind häufig auch alternative Bearbeitungen der Aufgabenstellungen denkbar, die bei fachlicher Richtigkeit und angemessener Berücksichtigung der Operatoren mit entsprechenden Bewertungseinheiten zu bewerten sind.

Die rechts stehenden Bewertungseinheiten sind jedoch verbindlich. Bei der Korrektur, Bewertung und Beurteilung sind die Bemerkungen gemäß der EPA Mathematik vom 24.05.2002 (Abschnitt 3.5 Bewertung von Prüfungsleistungen) zu beachten.

Folgender **Bewertungsmaßstab** ist bezogen auf die Gesamtzahl von 88 BE anzuwenden:

Ab Prozent	<b>95</b>	<b>90</b>	<b>85</b>	<b>80</b>	<b>75</b>	<b>70</b>	<b>65</b>	<b>60</b>	<b>55</b>	<b>50</b>	<b>45</b>	<b>40</b>	<b>34</b>	<b>28</b>	<b>20</b>	<b>00</b>
Punkte	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>10</b>	<b>09</b>	<b>08</b>	<b>07</b>	<b>06</b>	<b>05</b>	<b>04</b>	<b>03</b>	<b>02</b>	<b>01</b>	<b>00</b>