Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (34 BE)	Block 2 Stochastik (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 175 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

In einem Betrieb wird im Produktionsprozess ein Gas verbraucht. Dazu wird das benötigte Gas durch eine Leitung aus dem Gastank in die Produktionsstätte geleitet. Das hierbei pro Zeit durch die Leitung strömende Gas wird als Gasstrom bezeichnet. Dieser wird in Litern pro Stunde $\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{h}}\right)$ gemessen, die Zeit in Stunden (h). Der Arbeitstag in dem Betrieb dauert 14 Stunden, am Ende des Arbeitstages wird das Ventil des Gastanks geschlossen.
Es wird eine Langzeitmessung durchgeführt, die folgende Werte ergibt:

Zeit in h nach Beginn des Arbeitstages	0	4	6	10
Gasstrom in $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{h}}$	2000	3140	1500	1440

2 Stunden und 12,2 Stunden nach Arbeitsbeginn treten Spitzenwerte im Gasstrom auf.
Für das aus diesen Werten entwickelte Modell wird die Funktion f mit
$f(t) = -3 \cdot t^4 + 88 \cdot t^3 - 816 \cdot t^2 + 2304 \cdot t + 2000,\ 0 \le t \le 14$, verwendet.
Dabei wird t in h und f(t) in $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{h}}$ angegeben.
Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Arbeitstages.

a) Der Betriebsleiter stimmt der Nutzung des Modells unter folgenden Bedingungen zu:
- Die mit dem Modell berechneten Werte weichen nicht mehr als 5 % von den Tabellenwerten ab.
- Die Zeitpunkte der mit dem Modell berechneten Spitzenwerte weichen nicht mehr als 15 Minuten von den Zeitpunkten der Spitzenwerte der Messung ab.

Weisen Sie nach, dass mit der Funktion f die Bedingungen des Betriebsleiters erfüllt werden und f somit für die folgenden Berechnungen genutzt werden kann.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt zwischen den Zeitpunkten der Spitzenwerte im Gasstrom, an dem der Gasstrom am stärksten abnimmt.
Berechnen Sie die Gesamtzeit im Laufe eines Arbeitstages, in welcher der Gasstrom mindestens $1500\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{h}}$ beträgt. (14 BE)

b) Das Gas wird für den Verbrauch in einem Tank gespeichert. Dem Tank können $15\,600\ \mathrm{L}$ Gas entnommen werden. Über eine Anzeige wird das noch entnehmbare Gasvolumen in Prozent angezeigt. Zu Beginn eines Arbeitstages ist der Tank vollständig gefüllt, die Anzeige zeigt 100 % an.
Bestimmen Sie das in der ersten Stunde des Arbeitstages entnommene Gasvolumen.
Begründen Sie, dass das für die Produktion zu einem Zeitpunkt x nach Arbeitsbeginn noch entnehmbare Gasvolumen durch die Funktion g mit
$g(x) = 15\,600 - \int_0^x f(t)\,dt$, x in h, g(x) in L, beschrieben werden kann.
Der Tank muss aufgefüllt werden, sobald die Anzeige 20 % anzeigt.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beginns dieses Auftankvorgangs. (9 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x) = \frac{3}{4} \cdot x^4 - k \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot k \cdot x\,,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{R}\,,\text{ gegeben.}$$

In der Abbildung der Anlage sind zwei Graphen für $k = -1$ und $k = -2$ dargestellt.
Entscheiden Sie, welcher der beiden Graphen zu dem Parameterwert $k = -1$ gehört.
Entscheiden Sie, ob es einen Wert für k gibt, sodass der Graph von f_k symmetrisch zur y-Achse ist.
Es gilt: $f_k{}'(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-k)$.
Begründen Sie damit, dass die Graphen von f_k entweder drei Extrempunkte oder nur einen Extrempunkt und einen Wendepunkt haben. (11 BE)

Material

Anlage

Graphen zu Teilaufgabe c)

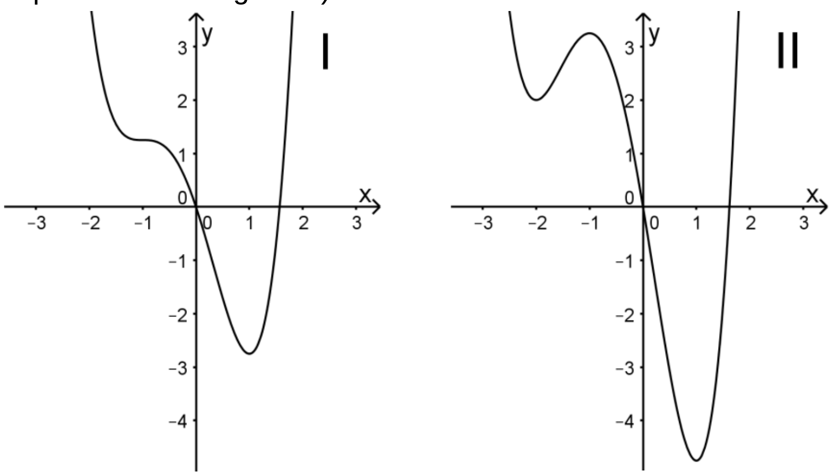


Abbildung: Graphen von f_k für $k = -1$ und $k = -2$

Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung in der Anlage zeigt die Graphen der Funktionen f und f'.
Entscheiden Sie, welche der Funktionen zu welchem Graphen gehört.
Begründen Sie, dass der Graph von f keinen Extrempunkt hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, in dem die Tangente an den Graphen von f die Steigung $-\frac{1}{2}$ hat.
Die Koordinatenachsen, der Graph der Funktion f und die Gerade zu $x = a$ mit $a > 0$ schließen eine Fläche ein. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a \mid f(a))$ heißt t_a.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass der Inhalt dieser Fläche mit dem Betrag der Steigung der Tangente t_a übereinstimmt. (11 BE)

b) Für eine Stelle $u > 0$ sind $O(0 \mid 0)$, $B(u \mid 0)$ und $C(u \mid f(u))$ die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks. Es gibt einen Punkt C auf dem Graphen von f so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B und C.
Betrachtet werden alle Punkte, die auf dem Graphen von f liegen.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der vom Ursprung den kleinsten Abstand hat.
Die Gerade g verläuft durch den Punkt $E(1 \mid e^{-1})$ und ist senkrecht zur Tangente an den Graphen von f im Punkt E.
Untersuchen Sie, ob g eine Ursprungsgerade ist. Ohne Nachweis können Sie verwenden: Wenn für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden die Beziehung gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$, dann stehen die zugehörigen Geraden senkrecht aufeinander. (13 BE)

c) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R}$. Die Graphen von f und h schneiden sich im Punkt $F(-1 \mid e)$. Die Graphen von f und h und die y-Achse schließen für $x \le 0$ eine Fläche ein.
Bestimmen Sie deren Inhalt.
Beurteilen Sie mithilfe der Ableitungen von f und h die Behauptung, dass für $x < 0$ weitere Schnittpunkte existieren können.
Untersuchen Sie mithilfe des Graphen der Funktion h, für welche Stellen die zugehörigen Funktionswerte von h nur einmal auftreten. (10 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage

Graphen zu Teilaufgabe a)

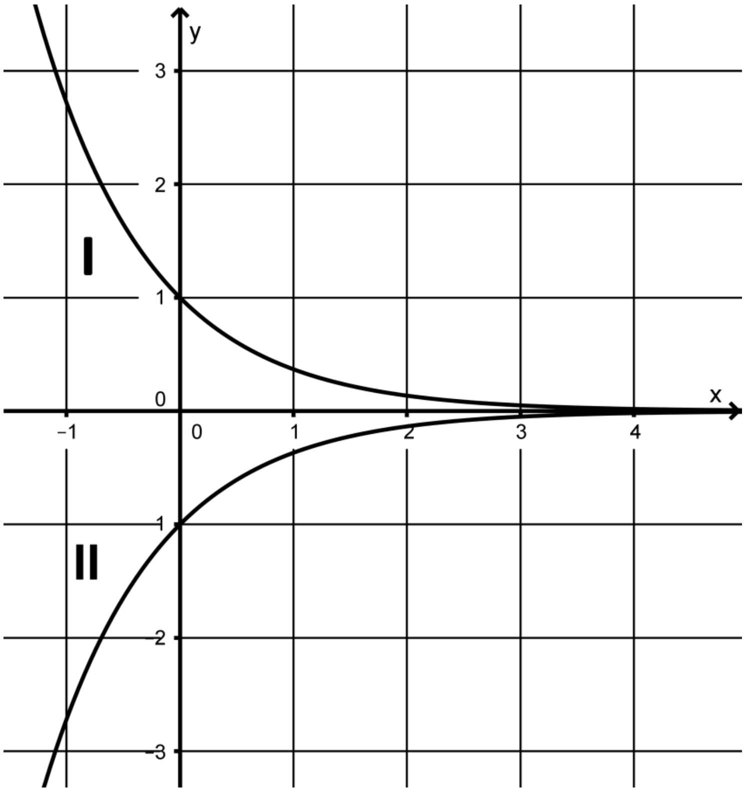


Abbildung: Graphen von f und f′

Aufgabe 2A

Das Spiel „Die goldene Zehn“ wird mit einem idealen Würfel gespielt, bei dem eine Seitenfläche mit einem „V“, zwei Seitenflächen mit einer „2“, zwei mit einer „5“ und eine mit einer „10“ bedruckt sind. Es gelten folgende Spielregeln:

- Zu Beginn eines Spiels beträgt die Punktzahl des Spielers null.
- Zeigt der Würfel nach einem Wurf eine Zahl, wird diese zur bisherigen Punktzahl addiert.
- Der Spieler gewinnt, wenn er genau die Punktzahl 10 erreicht.
- Er verliert, wenn er eine Punktzahl größer als 10 erreicht oder ein „V“ würfelt.
- Das Spiel ist beendet, wenn der Spieler gewonnen oder verloren hat.

Der Spieler zahlt vor dem Spiel einen Einsatz von einem Euro an den Spielleiter. Gewinnt der Spieler, so bekommt er pro Wurf in diesem Spiel zwei Euro ausgezahlt.

a) Das Spiel wird einmal gespielt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit zwei Würfen die Punktzahl 12 erreicht. (3 BE)

Die Zufallsgröße X beschreibt den an den Spieler ausgezahlten Betrag in Euro.
Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	2	4	10
$P(X=k)$	$\frac{349}{486}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{243}$

b) Begründen Sie, dass X nur die Werte 0, 2, 4 oder 10 annehmen kann.
Beurteilen Sie, ob das Spiel fair ist. (6 BE)

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler ein Spiel gewinnt, beträgt $\frac{137}{486}$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler von 120 Spielen mindestens 40 gewinnt.
Geben Sie die Bedeutung des Terms $19 \cdot \frac{349}{486} \cdot \left(\frac{137}{486}\right)^{18}$ im Sachzusammenhang des Spiels „Die goldene Zehn“ an. (4 BE)

d) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler von 20 Spielen mindestens 5 Spiele mit je höchstens 2 Würfen gewinnt, mindestens 70 % beträgt. (4 BE)

Aufgabe 2B

Es werden Kühe einer neuen Züchtung betrachtet. Bei zehn Prozent der Kühe enthält die Milch einen Inhaltsstoff, der sich mithilfe einer Untersuchung eindeutig nachweisen lässt. Dabei wird pro Kuh immer genau eine Milchprobe entnommen.

a) Die Milchproben von 160 Kühen werden untersucht. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Kühe an, in deren Milch dieser Inhaltsstoff enthalten ist, und kann als binomialverteilt angenommen werden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den untersuchten Milchproben genau 16 den Inhaltsstoff enthalten.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 20 der untersuchten Milchproben den Inhaltstoff enthalten.

Ermitteln Sie das kleinste um den Erwartungswert von X symmetrische Intervall mit ganzzahligen Grenzen a und b, für das gilt:
$P(a \le X \le b) \ge 95\,\%$. (8 BE)

b) Die Milchproben mehrerer Kühe werden nun nach folgendem Verfahren untersucht:
Jeder Milchprobe wird ein Teil entnommen. Diese Teile werden gemischt und das Gemisch wird auf den Inhaltsstoff untersucht. Wird der Inhaltsstoff aufgefunden, werden die Milchproben aller Kühe einzeln untersucht.
Die Anzahl der Kühe, deren Milch den Inhaltsstoff enthält, kann weiterhin als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden.
Bestimmen Sie für die Milchproben von 20 Kühen

- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gemisch den Inhaltsstoff enthält,
- die zu erwartende Anzahl an Untersuchungen.

Es gibt eine Anzahl an Milchproben, bis zu der nach diesem Verfahren weniger Untersuchungen zu erwarten sind, als wenn alle Milchproben einzeln untersucht werden.
Ermitteln Sie diese Anzahl. (9 BE)

Aufgabe 3A

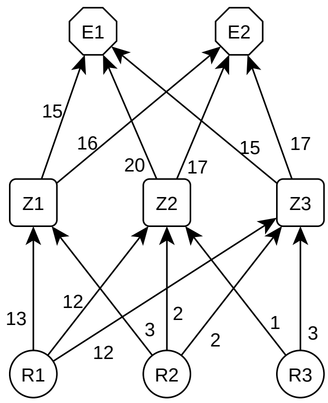
Ein Betrieb stellt Fruchtgummi aus der Grundsubstanz R1 und zwei Fruchtsaftkonzentraten R2 und R3 her. Es entstehen drei Sorten einzelner Fruchtgummitiere Z1, Z2 und Z3. Unterschiedliche Zusammensetzungen aus den drei Sorten ergeben die in Tüten verpackten Sortimente E1 und E2. Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Grundsubstanz und der Fruchtsaftkonzentrate für je ein Fruchtgummitier bzw. wie viel Stück der Fruchtgummitiere für je eine Tüte der jeweiligen Sortimente benötigt werden. Der dargestellte Übergangsgraph verdeutlicht den Produktionsprozess.

	Z1	Z2	Z3
R1	13	12	12
R2	3	2	2
R3	0	1	3

Tabelle 1

	E1	E2
Z1	a	16
Z2	20	b
Z3	15	17

Tabelle 2



a) Geben Sie die fehlenden Werte für a und b aus Tabelle 2 an.
Erläutern Sie die Bedeutung des Eintrags 0 in Tabelle 1 im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie den Bedarf für die Grundsubstanz R1 und die Fruchtsaftkonzentrate R2 und R3 für eine Produktion von 15 Sortimenten E1 und 12 Sortimenten E2.

Es sollen 50 Tüten des Sortiments E1 und 50 Tüten des Sortiments E2 produziert werden. Im Lager befinden sich noch 2000 ME der Grundsubstanz R1, 3000 ME des Fruchtsaftkonzentrats R2 und 1000 Stück der Fruchtgummitiere Z1. Es sollen alle vorhandenen Materialien verwendet werden.
Bestimmen Sie die ME der Grundsubstanz und die ME aller Fruchtsaftkonzentrate, die für diese Produktion nachbestellt werden müssen. (12 BE)

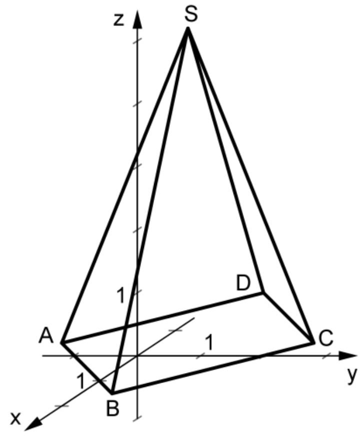
b) Eine Tüte eines neuen Sortiments E3 soll unter folgenden Bedingungen zusammengestellt werden:
- Sie enthält insgesamt 50 Stück der Fruchtgummitiere Z1, Z2 und Z3,
- von jeder Sorte der Fruchtgummitiere ist mindestens ein Stück enthalten,
- es werden genau 140 ME des Fruchtsaftkonzentrats R3 verwendet,
- von der Grundsubstanz R1 und dem Fruchtsaftkonzentrat R2 stehen beliebig viele ME zur Verfügung.

Untersuchen Sie, aus welchen Stückzahlen der Fruchtgummitiere die Tüte des neuen Sortiments E3 zusammengestellt werden kann. (5 BE)

Aufgabe 3B

Von einer Pyramide sind folgende Eckpunkte gegeben:

$A(2\,|\,0\,|\,1)$, $B(4\,|\,2\,|\,1)$, $C(2\,|\,4\,|\,1)$ und $S(2\,|\,2\,|\,6)$.



a) Zeigen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt B.
Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Punktes D so, dass A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrats sind. (6 BE)

b) Zeigen Sie, dass es Punkte $S_z(2\,|\,2\,|\,z)$ so gibt, dass das jeweilige Dreieck ACS_z ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei S_z ist. (4 BE)

c) Die Punkte B, C und S liegen in einer Ebene E.
Zeigen Sie, dass es in der Ebene E einen Punkt gibt, der drei gleiche Koordinaten hat und geben Sie dessen Koordinaten an.
Untersuchen Sie, ob jede beliebige Ebene einen Punkt hat, der drei gleiche Koordinaten hat. (7 BE)