

Stochastik
Aufgabengruppe 1

BE

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100 000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12 000 jeweils 5€ wert, der Rest ist jeweils 1€ wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

1 Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke.“

B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1€.“

2 **a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

2 **b)** Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0,05$ und $P(B) = 0,044$.

2 **c)** Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der fünften Flasche eine Gewinnmarke befindet.

4 **d)** Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks, wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5% mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.

3 **e)** Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

(Fortsetzung nächste Seite)

Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

- 7 **2** Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Signifikanztest für die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Flasche eine Gewinnmarke zu finden, beträgt mindestens 0,05.“ auf einem Signifikanzniveau von 1 % durchzuführen. Für den Fall, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.

Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese und bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3 % der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

Stochastik
Aufgabengruppe 2

BE

- 3 **1** Nach einem Bericht zur Allergieforschung aus dem Jahr 2008 litt damals in Deutschland jeder vierte bis fünfte Einwohner an einer Allergie. 41 % aller Allergiker reagierten allergisch auf Tierhaare.
Kann aus diesen Aussagen gefolgert werden, dass 2008 mindestens 10 % der Einwohner Deutschlands auf Tierhaare allergisch reagierten?
Begründen Sie Ihre Antwort.
- 2 **2** Nach einer aktuellen Erhebung leiden 25 % der Einwohner Deutschlands an einer Allergie. Aus den Einwohnern Deutschlands werden n Personen zufällig ausgewählt.
- 4 **a)** Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine der ausgewählten Personen an einer Allergie leidet.
- 5 **b)** Im Folgenden ist $n = 200$. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter den ausgewählten Personen, die an einer Allergie leiden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der binomialverteilten Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht.
- 3** Ein Pharmaunternehmen hat einen Hauttest zum Nachweis einer Tierhaarallergie entwickelt. Im Rahmen einer klinischen Studie zeigt sich, dass der Hauttest bei einer aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählten Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 39,5 % ein positives Testergebnis liefert. Leidet eine Person an einer Tierhaarallergie, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % positiv. Das Testergebnis ist jedoch bei einer Person, die nicht an einer Tierhaarallergie leidet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % ebenfalls positiv.
- 4 **a)** Ermitteln Sie, welcher Anteil der Bevölkerung Deutschlands demnach allergisch auf Tierhaare reagiert. *(Ergebnis: 9%)*
- 2 **b)** Eine aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählte Person wird getestet; das Testergebnis ist positiv. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich an einer Tierhaarallergie leidet.
- 2 **c)** Aus der Bevölkerung Deutschlands wird eine Person zufällig ausgewählt und getestet. Beschreiben Sie das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang mit dem Term $0,09 \cdot 0,15 + 0,91 \cdot 0,35$ berechnet wird.