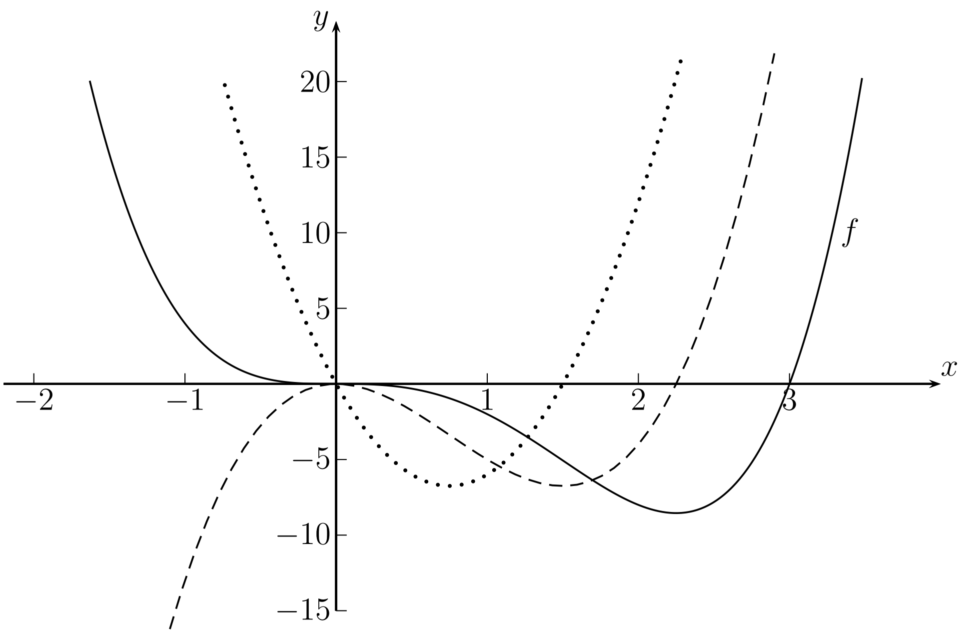
Name: ____

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3\,x^3$ und die Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitung.



1.1 Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f und ordnen Sie die Ableitungsfunktionen den abgebildeten Graphen zu.

(2 P)

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ursprung $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist.

(3 P)

Name: ____

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1$ gegeben.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

(2 P)

2.2 Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0 \mid 1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

(3 P)

Name: ______________________________________

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

3.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$			
$\lvert\vec{a}\rvert \times \vec{b}$			
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$			
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \lvert\vec{c}\rvert)^2$			
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			

(3 P)

3.2 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
Geben Sie einen Term an, dessen Wert die Zahl Null ist und der nur aus den Symbolen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ sowie Klammern besteht. Jedes der Symbole $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ muss dabei in dem Term mindestens einmal verwendet werden.

(2 P)

Name: ______________________________

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Kugel K mit $K: (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = 100$ und die Gerade g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Untersuchen Sie, ob die Gerade g die Kugel K schneidet.

(2 P)

4.2 Ermitteln Sie eine Parameterform einer Geraden h, die eine Tangente an die Kugel K mit dem Berührpunkt $B(11 \,|\, 0 \,|\, 4)$ ist.

(3 P)

Name: ____

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben ist die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

5.1 Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(2 P)

5.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

(3 P)

Name: ____

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Auf einem Schiff kann man Süßigkeiten am Kiosk kaufen. Von den an einer Schiffsrundfahrt teilnehmenden Personen sind 60 % Frauen.
80 % der reisenden Frauen und 40 % der reisenden Männer kaufen Süßigkeiten am Kiosk.

6.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang durch eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel dar. (3 P)

6.2 Ein Passagier hat Süßigkeiten am Kiosk gekauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich dabei um eine Frau handelt. (2 P)

Name: ____

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

7.1 Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2 P)

7.2 Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

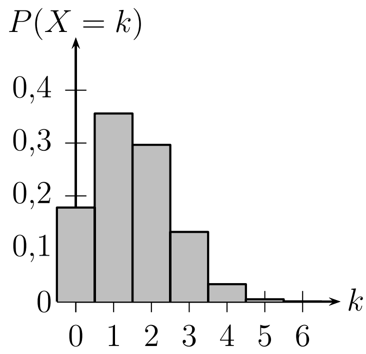


Abb. 1

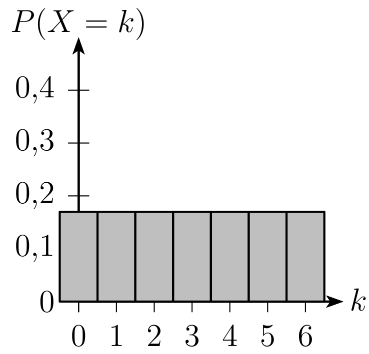


Abb. 2

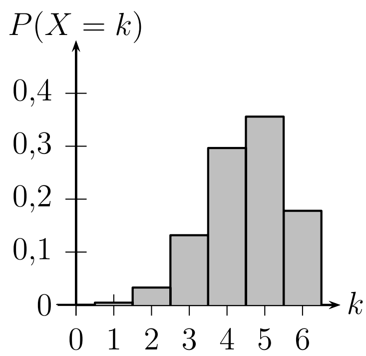


Abb. 3

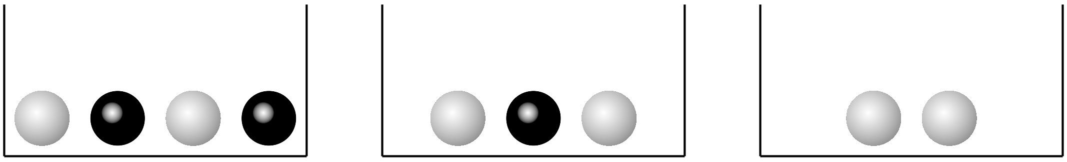
Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(3 P)

Name: ____

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



8.1 Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

(2 P)

8.2 Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

> *Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.*

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

(3 P)

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x},\ a > 0$.
Die Graphen von f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) a1) Skizzieren Sie $G_{0,2}$ für $0 \leq x \leq 40$.

a2) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1 \,|\, \frac{1}{2})$ auf G_a liegt.

a3) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.
[zur Kontrolle: Die Extremstellen von f_a sind 0 und $\frac{2}{a}$.]

a4) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^2}$ liegen.

(12 P)

b) Für jeden Wert von b mit $b > 0$ sind die Punkte $A(0 \,|\, 0)$ und $B(b \,|\, 0)$ sowie der Punkt $C(b|f_{0,2}(b))$ gegeben.

b1) Skizzieren Sie ein mögliches Dreieck ABC in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a).

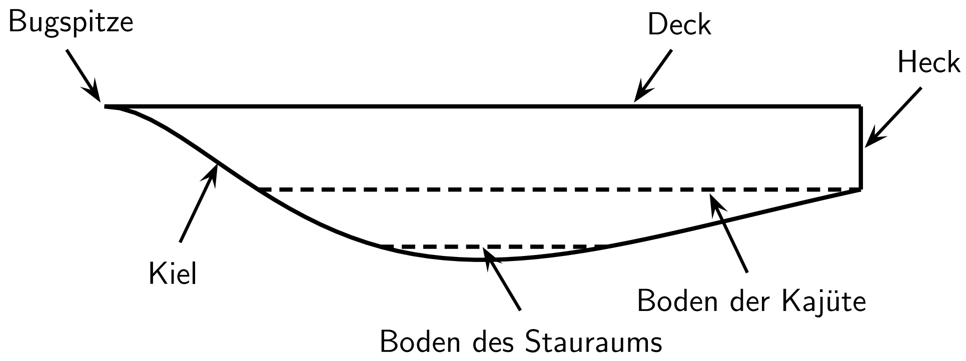
b2) Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

Der Graph $G_{0,2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein.

b3) Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

(11 P)

Die Abbildung zeigt schematisch den Längsschnitt eines Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.



Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang der Decklinie verläuft, beschreibt die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit

$$k(x) = -0{,}3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot x}$$

für $0 \leq x \leq 20$ modellhaft die Kiellinie. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

c) c1) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0{,}2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0{,}2}$ hervorgeht.

c2) Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels.

Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt $2{,}20\,\mathrm{m}$ unterhalb des Decks. Der parallel dazu verlaufende Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von $6\,\mathrm{m}$.

c3) Berechnen Sie die Länge des Bodens der Kajüte in Längsrichtung des Schiffs.

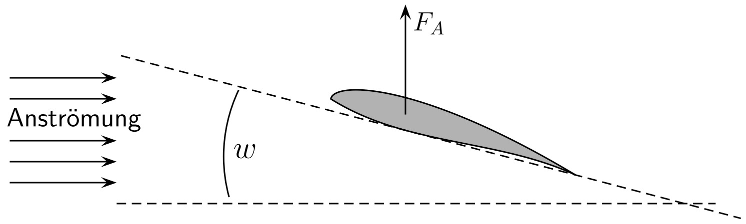
c4) Ermitteln Sie rechnerisch, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.

(17 P)

Aufgabe 2: Analysis-CAS

In einem Forschungsinstitut werden Flugzeugtragflächen untersucht.

a) Im Windkanal wird bei konstanter Anströmung die Auftriebskraft F_A in Abhängigkeit vom Anstellwinkel w untersucht.



Es werden die folgenden Messergebnisse aufgenommen:

Anstellwinkel w in Grad	0	5	10	15	20
Auftriebskraft F_A in Kilonewton (kN)	5	10	13	15	12

Die Abhängigkeit der Auftriebskraft F_A vom Anstellwinkel w soll mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades modelliert werden.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Funktion f mit

$$f(w) = -\frac{1}{3000}w^4 + \frac{17}{1500}w^3 - \frac{91}{600}w^2 + \frac{91}{60}w + 5 \quad \text{und} \quad 0 \leq w \leq 20.$$

a2) Bestimmen Sie die maximale Auftriebskraft im Rahmen der Modellierung.

(9 P)

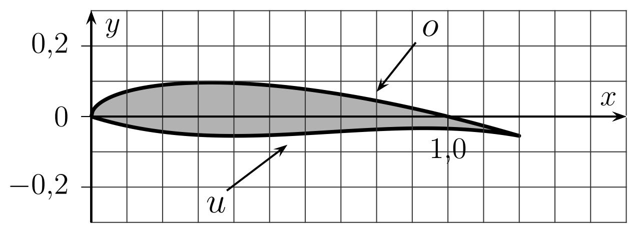
Der abgebildete Querschnitt einer Tragfläche (das sogenannte Profil) lässt sich mit Hilfe zweier Funktionen modellieren. Die Funktion o mit

$$o(x) = -0{,}25 \cdot \sqrt{x} \cdot (x-1) \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1{,}2$$

beschreibt die obere Begrenzungslinie des Profils.
Die Funktion u mit

$$u(x) = -\frac{\sqrt{30}}{480} \cdot (25x^3 - 50x^2 + 28x) \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1{,}2$$

beschreibt die untere Begrenzungslinie des Profils.



Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter in der Realität.

b) b1) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von o und u.

b2) Weisen Sie nach, dass der Graph von o an jeder Stelle x mit $0 < x < 1{,}2$ rechtsgekrümmt ist.

b3) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Graphen von o und u an der Stelle $1{,}2$ schneiden.

(9 P)

c) An jeder Stelle x mit $0 \leq x \leq 1{,}2$ wird die Dicke des Profils durch die Differenz der Funktionswerte $o(x)$ und $u(x)$ beschrieben.

c1) Bestimmen Sie die maximale Dicke des Profils.

c2) Berechnen Sie die durchschnittliche Dicke des Profils.

(9 P)

d) Für $0 \leq x \leq 1{,}2$ und $k \geq 0{,}4$ wird die Schar der Funktionen u_k mit

$$u_k(x) = -\frac{\sqrt{30}}{600k^2}\left(5\,x^3 - (10k+6)\cdot x^2 + (5k^2+12k)\cdot x\right)$$

verwendet, um die untere Begrenzungslinie des Profils zu variieren.

d1) Zeigen Sie, dass die Funktion u zur Schar der Funktionen u_k gehört.

d2) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die der Graph von u_k einen Wendepunkt besitzt.

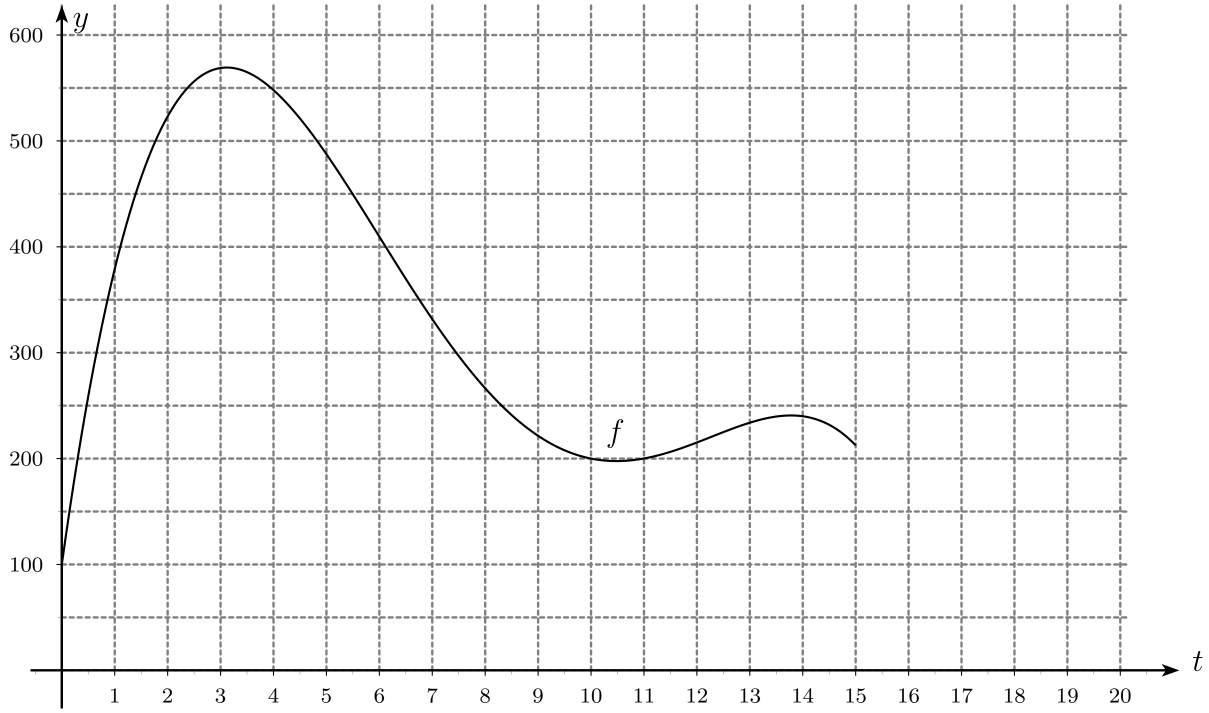
d3) Sei k nun eine reelle Zahl mit $0{,}4 \leq k < 1{,}2$.
Die Graphen von u_k und o schneiden sich an den Stellen 0 und $1{,}2$.
Die sogenannte Profiltangente p_k ist die Gerade, die durch den Punkt $(1{,}2 \mid u_k(1{,}2))$ verläuft und den Graphen von u_k an einer Stelle x mit $0 \leq x < 1{,}2$ berührt.
Die Gerade g_k hat mit dem Graphen von u_k genau die Punkte $(k \mid u_k(k))$ und $(1{,}2 \mid u_k(1{,}2))$ gemeinsam.

Zeigen Sie, dass die Gerade g_k die Profiltangente p_k ist.

(13 P)

Aufgabe 1: Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



a) a1) Geben Sie mit Hilfe der Grafik das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

a2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

a3) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an.

a4) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.

a5) Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$I: \quad y = -8{,}5\,t^3 + 3{,}7\,t^2 + a\,t + 100 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$II: \quad y = -0{,}3\,t^4 + b\,t^2 + 100 \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$$

(16 P)

b) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot (2\,t^3 - 39\,t^2 + 180\,t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$. Die Funktion G mit

$$G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26\,t^3 + 180\,t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g.

b1) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.

b2) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

b3) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

b4) Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(17 P)

c) Bei einem dritten Becken kann die momentane Änderungsrate des Wasservolumens durch ein Ventil reguliert werden. Die Änderungsrate wird je nach Einstellung des Ventils durch eine Funktion h_k mit

$$h_k(t) = 10 \cdot k \cdot e^{-kt} \qquad ; \qquad k > 0$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $3\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken.

c1) Ermitteln Sie, für welchen Parameter k sich nach 2 Stunden genau $8\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken befinden.

c2) Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_k an.

(7 P)

Aufgabe 2: Analysis

Für die „Deichtherme“ wird eine neue Wasserrutsche geplant. Der Graph in der Abbildung modelliert die Rutschbahn. Der Graph beginnt im Punkt $A(0 \mid 24)$ mit einer Steigung von $-100\,\%$ und endet im Punkt $B(40 \mid 0)$. Ferner verläuft er durch den Punkt $C(20 \mid 12)$. Die x-Achse stellt den ebenen Boden der Schwimmhalle bzw. die auf gleicher Höhe liegende Wasseroberfläche dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) a1) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung zwischen Start- und Endpunkt der Rutschbahn und ermitteln Sie mit Hilfe der Grafik näherungsweise die Steigung im Punkt C.

a2) Der abgebildete Graph gehört zu einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

(8 P)

b) Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}0005 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - x + 24 \text{ mit } 0 \le x \le 40.$$

b1) Die Rutsche soll durch zwei vertikale Pfeiler abgestützt werden. Der Architekt plant einen 10 Meter und einen 15 Meter hohen Pfeiler.
Berechnen Sie, wie weit die Pfeiler voneinander entfernt stehen.

b2) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in [0; 40]$ gilt, und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

b3) Zeigen Sie, dass der Punkt C ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

(11 P)

c) Die Rutschen eines anderen Planungsbüros werden für $0 \leq x \leq 40$ durch die Graphen der Funktionenschar g_a mit

$$g_a(x) = 24 \cdot e^{-0{,}05 \cdot a \cdot x} \quad , \ a > 0$$

beschrieben.

c1) Skizzieren Sie den Graphen von $g_{1,5}$ und bestimmen Sie die Höhe, aus der ein Badegast am Ende dieser Rutsche ins Wasser fällt.

c2) Zwei neue Sicherheitsbestimmungen lauten:

i. Die Höhe, aus der ein Badegast am Ende der Rutsche ins Wasser fällt, darf höchstens 1,5 Meter betragen.

ii. Der Neigungswinkel darf im Startpunkt nicht größer als 55° sein.

Untersuchen Sie, ob es Parameter a gibt, für die beide Bedingungen erfüllt sind.

c3) Gegeben ist der folgende Term

$$\sum_{i=0}^{3} \sqrt{10^2 + (g_{1,5}(10(i+1)) - g_{1,5}(10i))^2} \ .$$

Veranschaulichen Sie den zweiten Summanden dieses Terms in Ihrer Skizze aus Teilaufgabe c1).
Interpretieren Sie den gesamten Term im Sachzusammenhang.

(15 P)

d) Die Funktion G ist gegeben durch

$$G(a) = \int_0^{40} g_a(x)\, dx \quad \text{mit} \quad a > 0.$$

d1) Berechnen Sie $G(5)$.

d2) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 0$ gilt:

$$G(a) < \frac{480}{a}$$

(6 P)

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Stadt befindet sich ein quaderförmiges, $65\,\mathrm{m}$ hohes Haus. In der Modellierung entspricht die x_1x_2-Ebene dem Erdboden. Die Grundfläche des Hauses ist das Rechteck $RSTU$. Die jeweils entsprechenden Eckpunkte der Dachfläche heißen R', S', T' und U'.

Die Eckpunkte R, S und T haben die Koordinaten
$R(80 \mid 200 \mid 0)$,
$S(120 \mid 180 \mid 0)$ und
$T(135 \mid 210 \mid 0)$.

Eine Einheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Flugbahn einer Drohne wird beschrieben durch eine Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dabei beschreibt $\vec{x}$ die Position der Drohne zur Zeit t, wobei t in Sekunden gemessen wird. Zur Zeit $t = 0$ durchfliegt die Drohne also den Punkt $P(0 \mid 0 \mid 5)$.

a) a1) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes U der Grundfläche.

a2) Ermitteln Sie die Entfernung der Drohne zum Punkt P nach 15 Sekunden.

a3) Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Flugbahn.

(7 P)

b) b1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $RSS'R'$ des Hauses.

b2) Untersuchen Sie, ob die Drohne diese Fläche treffen wird.

b3) Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn der Drohne zur Geraden h durch die Punkte R' und S' hat.

(15 P)

c) Auf einem anderen Flug fliegt die Drohne entlang der Geraden k mit

$$k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ -220 \\ 80 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt s die Zeit in Sekunden nach dem Durchfliegen des Punktes $Q(40|-220|80)$ an.

Die Drohne kann Signale von einer Sendeanlage S_1 mit den Koordinaten $S_1(40 \mid -260 \mid 10)$ und der Reichweite $250\,\mathrm{m}$ oder von einer Sendeanlage S_2 mit den Koordinaten $S_2(40 \mid 300 \mid 10)$ und der Reichweite $390\,\mathrm{m}$ empfangen.

c1) Bestimmen Sie den Punkt D, an dem die Drohne den Sendebereich von S_1 verlässt, und prüfen Sie, ob sie dort bereits im Sendebereich von S_2 ist.

c2) Die Drohne fliegt auf einen gesperrten Teil des Luftraums zu. Die Grenze zu diesem Bereich wird durch die Ebene F mit

$$F : 3\,x_1 - 4\,x_2 = -400$$

modelliert.

Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Drohne nur noch einen Abstand von $200\,\mathrm{m}$ zu der Luftraumgrenze hat.

(12 P)

d) Gegeben ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \vec{0}.$$

d1) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 35 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

d2) Interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

(6 P)

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt.

Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualitätsstufe B.

a3) Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140."
F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150."

a4) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang:

$$1-\left(\sum_{i=0}^{120}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}+\sum_{i=160}^{200}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}\right)$$

(14 P)

b) Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Pro Pflanze der Qualitätsstufe B kann im Mittel die gleiche Anzahl von Gurken geerntet werden wie bei Pflanzen der Qualitätsstufe A. Es besteht das Risiko, dass ein Samenkorn zwar keimt, durch Wettereinflüsse oder Schädlinge aber keine erntereife Pflanze heranwächst. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe B 25 %.
Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis.
Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken, indem Sie die Samenkosten pro erntereifer Gurkenpflanze bestimmen.

(6 P)

c) Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B zufällig ausgewählt und gesät.

c1) Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest, der das Ziel hat, die Behauptung des Großhändlers auf einem Signifikanzniveau von 5 % zu stützen.

c2) Bestimmen Sie für den oben konzipierten Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Voraussetzung, dass die Keimwahrscheinlichkeit auf 80 % gestiegen ist.

(12 P)

d) Von einer dritten Qualitätsstufe C werden 50 Samenkörner gesät. Von diesen keimen 27. Aus diesem Stichprobenergebnis soll nun die Keimwahrscheinlichkeit eines Samenkorns der Qualitätsstufe C abgeschätzt werden.

d1) Prüfen Sie, ob eine Keimwahrscheinlichkeit von 60 % ($p = 0{,}6$) mit dem Stichprobenergebnis 27 auf einem Signifikanzniveau von 5 % verträglich ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im 95 %-Annahmebereich der Hypothese $H : p = 0{,}6$ liegt.

d2) Bestimmen Sie zu dem Stichprobenergebnis die obere Grenze des zugehörigen 95 %-Konfidenzintervalls für die Keimwahrscheinlichkeit auf 3 Dezimalen genau.

(8 P)