Mathematik Maturavorbereitung
Lösungen

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Carlo Oberkönig, Daniel Jung und Susanne Meindl

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de

Inhalt

Teil I

Lösungen

1 zu Algebra und Geometrie

zu 2.1.1: Falsch! $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{C}$ nicht. $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.

zu 2.1.2: 1.) 3.) 4.) ist richtig.

zu 2.1.3: $\mathbb{N}$ beschreibt die natürlichen Zahlen. Das sind alle positiven Zahlen größer gleich Null, z.B. 373, 5, 29. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ beschreibt die irrationalen Zahlen. Das sind alle Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen. Sie sind also nur durch sich selbst und 1 teilbar und umfassen nicht periodische, unendliche Dezimalzahlen wie z.B. π, $-65{,}2827474928\ldots$ und $4{,}2878302\ldots$.

zu 2.2.1: 2.) und 3.) sind richtig.

zu 3.2.1: $1{,}20x + 12.000 = K$ bzw. dazu äquivalente Gleichungen.

zu 3.2.2: Aus $z = 2{,}54 \cdot c = 2{,}54 \cdot 5 = 12{,}7$ folgt, das 5 Zoll 12,7 cm entsprechen.

zu 3.4.1: Wir lösen die Ungleichung nach x auf und erhalten:

$$\begin{array}{rrcll} & -5x+2 & < & 7 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & -5x & < & 5 & \mid : (-5) \text{ Achtung Ungleichzeichen umdrehen!} \\ \Leftrightarrow & x & > & -1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieser Ungleichung sind also alle reellen Zahlen größer als -1, kurz: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$.

zu 3.4.2: 1.) 2.) 3.) 5.) sind richtig

zu 3.5.1: Zunächst lösen wir das Gleichungssystem weitestgehend mit den uns bekannten Verfahren auf:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 3x - 7y & = & -8 & \mid \cdot 2 \\ \text{II} & ax + 14y & = & b & \\ \text{I}^* & 6x - 14y & = & -16 & \\ \text{II} & ax + 14y & = & b & \end{array}$$

I* und II addieren:

$$\Rightarrow \quad 6x + ax = -16 + b$$

Eine wahre Aussage (unendlich viele Lösungen) liegt vor, wenn $a = 6$ und $b = 16$ ist, denn dann gilt $6x - 6x = -16 + 16$ bzw. $0 = 0$.

zu 3.5.2:

a)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & \\
\mathrm{II} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 & \mid 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \\
\mathrm{III} & & & -2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 & \\
\hline
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & \\
\mathrm{IIa} & & & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \\
\mathrm{III} & & & -2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 & \mid \mathrm{IIa}+2\cdot\mathrm{III} \\
\hline
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & \Rightarrow x_1 = 1 \\
\mathrm{IIa} & & & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \Rightarrow x_2 = 1 \\
\mathrm{IIIa} & & & & & 9x_3 & = & -9 & \Rightarrow x_3 = -1
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 & \\
\mathrm{II} & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 & \mid 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \\
\mathrm{III} & -4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 & \mid 4\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III} \\
\hline
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 & \\
\mathrm{IIa} & & & -x_2 & - & x_3 & = & -6 & \\
\mathrm{IIIa} & & & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -8 & \mid 2\cdot\mathrm{IIa}+\mathrm{IIIa} \\
\hline
\mathrm{I} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 & \Rightarrow x_1 = -1 \\
\mathrm{IIa} & & & -x_2 & - & x_3 & = & -6 & \Rightarrow x_2 = 2 \\
\mathrm{IIIa} & & & & & -5x_3 & = & -20 & \Rightarrow x_3 = 4
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\mathrm{I} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & \\
\mathrm{III} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 9 & \mid \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III} \\
\mathrm{II} & & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -5 & \\
\mathrm{IV} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\
\hline
\mathrm{I} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & \\
\mathrm{IIIa} & & & -4x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & -18 & \\
\mathrm{II} & & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -5 & \mid \mathrm{IIIa}+4\cdot\mathrm{II} \\
\mathrm{IV} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 3 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\text{I} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & \\
\text{IIIa} & & & -4x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & -18 & \\
\text{IIa} & & & & & 18x_3 & - & 5x_4 & = & -38 & \\
\text{IV} & & & & & x_3 & + & x_4 & = & 3 & |\text{IIa} - 18\cdot\text{IV} \\
\hline
\text{I} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & \Rightarrow x_1 = 1 \\
\text{IIIa} & & & -4x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & -18 & \Rightarrow x_2 = 2 \\
\text{IIa} & & & & & 18x_3 & - & 5x_4 & = & -38 & \Rightarrow x_3 = -1 \\
\text{IV} & & & & & & & -23x_4 & = & -92 & \Rightarrow x_4 = 4
\end{array}$$

zu 4.5.1:

i)
$$\begin{array}{lrcll}
 & 5\cdot v & = & 7{,}5 & |:5 \\
\Leftarrow & v & = & 1{,}5 & \\
\Rightarrow & 2\cdot 1{,}5 & = & 3 & \\
 & x & = & 3 &
\end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{lrcll}
 & 2\cdot v & = & 7{,}5 & |:2 \\
\Leftarrow & v & = & 3{,}75 & \\
\Rightarrow & 5\cdot 3{,}75 & = & 18{,}75 &
\end{array}$$

$\rightarrow$ ein Vorzeichen muss aber noch umgedreht werden: $x = 18{,}75$.

zu 4.5.2: Der Ausdruck beschreibt den Wert der am Ende des Tages noch vorhandenen Modelle, bei Berücksichtigung des Rabatts von 20%.

zu 4.8.1: Wir schreiben die Geradengleichung in zwei Gleichungen um und wenden das Additionsverfahren an.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x & = & 2-2t \\
\text{II} & y & = & 5+2t
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad \text{I+II} \quad x+y=7 \quad\Rightarrow\quad \tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu 4.9.1: Wir gehen immer strikt nach dem Vorgehen vor.

a) RV vergleichen: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

zeigt, dass t in jeder Zeile den Wert $-1/3$ annimmt. Damit sind die Vektoren Vielfache voneinander. Anschließend machen wir eine Punktprobe, um zu schauen ob die Geraden parallel oder identisch sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} r = 1 \\ r = 4 \\ r = -2/3 \end{array}$$

Da r nicht überall gleiche Werte annimmt, liegt der Punkt nicht auf der Geraden und damit sind die Geraden echt parallel.

b) RV vergleichen: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

zeigt, dass t in jeder Zeile den Wert $1/2$ annimmt. Damit sind die Vektoren Vielfache voneinander. Anschließend machen wir eine Punktprobe, um zu schauen ob die Geraden parallel oder identisch sind:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -2 \end{array}$$

Da r überall gleiche Werte annimmt, liegt der Punkt auf der Geraden und damit sind die Geraden identisch.

c) RV vergleichen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

zeigt, dass t nicht überall den gleichen Wert annimmt. Damit sind die Vektoren keine Vielfachen voneinander. Wir setzen also die beiden Geraden gleich, um zu gucken, ob sie sich schneiden oder windschief sind.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lrl} \text{I} & 9 + 3r & = 7 + s \\ \text{II} & 2r & = -2 + s \\ \text{III} & 6 + r & = 2 + 2s \end{array}$$

Wir bestimmen den Parameter r, indem wir I-II rechnen und erhalten $9 + r = 9$ bzw. $r = 0$. Einsetzen von r in Gleichung I liefert $s = 2$. Wir setzen r und s in die dritte Gleichung ein und erhalten mit

$$6 + 0 = 2 + 2 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 6 \quad \checkmark$$

eine wahre Aussage. Somit liegt ein Schnittpunkt vor und die Geraden schneiden sich. Für den Schnittpunkt können wir r in g oder s in h einsetzen und erhalten $S(9|0|6)$.

zu 5.1.1: b beschreibt in diesem Fall die Gegenkathete. Wir haben nun die Gegenkathete b und die Hypotenuse c gegeben und verwenden deshalb den Sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{G}}{\text{H}} = \frac{53}{100} = 0{,}53 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}53) = 32^o$$

zu 5.1.2:

Für α:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{44{,}17}{77} \approx 0{,}57 \ \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}57) \approx 35^o$$

Für b:

$$
\begin{aligned}
& \sin(\beta) &=& \tfrac{b}{c} & \\
\Rightarrow\ & \sin(55^o) &=& \tfrac{b}{77} & | \cdot 77 \\
\Leftrightarrow\ & b &=& \sin(55^o) \cdot 77 & \\
& &\approx& 63{,}07 \text{ mm} &
\end{aligned}
$$

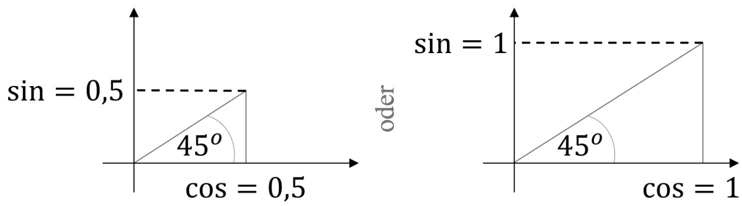
Für a:

$$
\begin{aligned}
& \cos(\beta) &=& \tfrac{a}{c} & \\
\Rightarrow\ & \cos(55^o) &=& \tfrac{a}{77} & | \cdot 77 \\
\Leftrightarrow\ & a &=& \cos(55^o) \cdot 77 & \\
& &\approx& 44{,}17 \text{ mm} &
\end{aligned}
$$

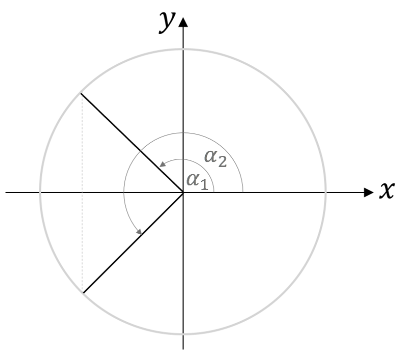
zu 5.1.3: In einem Dreieck ergeben die Winkel in Summe immer 180^o. Wir wissen, dass es in einem rechtwinkeligen Dreieck einen rechten Winkel 90^o gibt. Daraus folgt für den gesuchten Winkel:

$$90^o + 43^o + \alpha = 180^o \ \Rightarrow\ \alpha = 47^o$$

zu 5.2.1: Sinus und Cosinus müssen gleich groß sein. Tangens ist bei einem Winkel von 45^o gleich 1. Tangens stellt ja das Verhältnis von Sinus zu Cosinus dar. Sind beide gleich groß, ist das Verhältnis folglich 1.



zu 5.2.2:



2 zu Funktionen

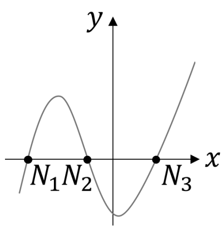
zu 8.3.1: Der Ansatz lautet $Z(x) = a/x$, da die Zeit für die Aufgabe abhängig vom Arbeiter ist. Daraus folgt:

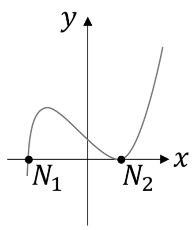
$$5 = \frac{a}{1} \quad \Leftrightarrow \quad a = 5$$

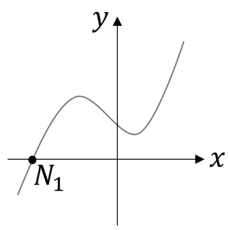
Die gesuchte Funktion lautet $Z(x) = 5/x$

zu 9.2.1: Eine Funktion dritten Grades hat

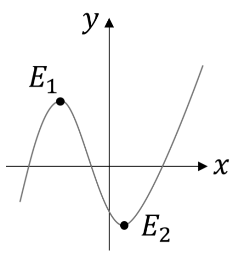
- mindestens 1, aber maximal 3 Nullstellen.

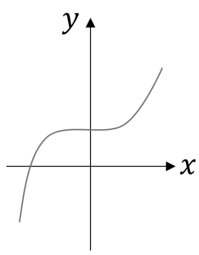




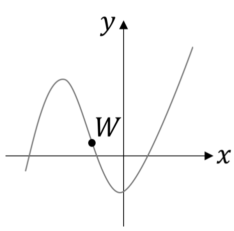


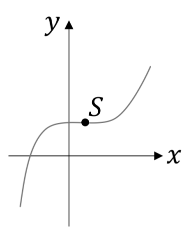
- entweder 0 oder 2 Extremstellen.





- immer eine Wendestelle (Sonderfall: Sattelpunkt).





zu 10.1: Aus der Abbildung folgt, das $a = 3$ ist, weil jede Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot b^x$ die y-Achse im Punkt a schneidet. Im Sachzusammenhang stellt der Parameter a den Anfangswert dar, also den Wert zum Zeitpunkt $t = 0$. Unsere Beobachtung startet mit 3000 Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$.

zu 11.1:

a)
$$\begin{aligned} 100000 &= 100 \cdot e^{0,25t} && \mid : 100 \\ \Leftrightarrow \quad 1000 &= e^{0,25t} && \mid \ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(1000) &= 0,25t && \mid : 0,25 \\ \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \ln(1000) &= t \end{aligned}$$

Antwort: Nach ca. 27,63 Tagen werden es 100.000 Bakterien sein.

b)
$$\begin{aligned} 200 &= 100 \cdot e^{0,25t} && \mid : 100 \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= e^{0,25t} && \mid \ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(2) &= 0,25t && \mid : 0,25 \\ \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \ln(2) &= t \end{aligned}$$

Antwort: Die Population verdoppelt sich nach ungefähr 2,77 Tagen.

zu 11.2:

a)
$$\begin{aligned} 8 &= 6 + 14 \cdot e^{-0,05t} && \mid -6 \\ \Leftrightarrow \quad 2 &= 14 \cdot e^{-0,05t} && \mid : 14 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{7} &= e^{-0,05t} && \mid \ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(\tfrac{1}{7}) &= -0,05t && \mid \cdot (-20) \\ \Leftrightarrow \quad -20 \cdot \ln(\tfrac{1}{7}) &= t \end{aligned}$$

Antwort: Nach ca. 38,92 Minuten beträgt die Temperatur vom Bier exakt 8 Grad.

b)
$$\begin{aligned} 6,1 &= 6 + 14 \cdot e^{-0,05t} && \mid -6 \\ \Leftrightarrow \quad 0,1 &= 14 \cdot e^{-0,05t} && \mid : 14 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{140} &= e^{-0,05t} && \mid \ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(\tfrac{1}{140}) &= -0,05t && \mid \cdot (-20) \\ \Leftrightarrow \quad -20 \cdot \ln(\tfrac{1}{140}) &= t \end{aligned}$$

Antwort: Nach ca. 98,83 Minuten ist das Bier nur noch 0,1 Grad wärmer als der Kühlschrank.

3 zu Analysis

zu 13.1.1: $\frac{f(b)\breve{}f(a)}{f(a)} = \frac{175-150}{150} \approx 0{,}167$. Die relative Änderungsrate beschreibt hier die prozentuale Zunahme der Produktionskosten. Sie sind um rund 17% gestiegen.

zu 13.1.2:

- Absolute Änderung: $f(5)\breve{}f(0) = 20\breve{}22 = -2^o$
- Relative Änderung: $\frac{f(5)\breve{}f(0)}{f(0)} = \frac{20-22}{22} \approx 0,0909$

Antwort: Die Temperatur hat während der ersten 5 Tage um 2^o bzw. 9,1% abgenommen.

zu 13.2.1: Durchschnittliche Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{v(6)-v(3)}{6-3} = \frac{56-29}{3} = 9$ km/h. Zwischen 3 und 6 Sekunden nimmt das Motorrad durchschnittlich 9 km/h pro Sekunde an Geschwindigkeit zu (= Beschleunigung).

zu 13.2.2: Der Term beschreibt die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zum Zeitpunkt t_1 (= Momentangeschwindigkeit).

zu 13.2.3: Richtig sind 1.) 2.) 3.) 5.)

zu 13.3.1: $x_n = 0{,}1x_{n-1} + 0{,}2$ oder $x_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}2$

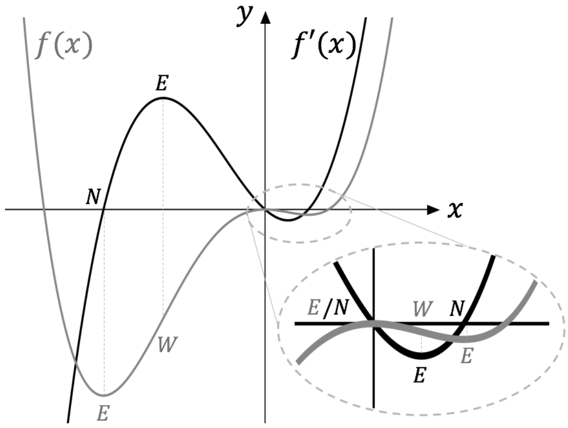
zu 13.3.2: Richtig sind 2.) 3.) 4.) 5.)

zu 14.1: $f'(x) = 16x^2 + 26x - 125$ und $f''(x) = 48x + 26$

zu 14.2: $f'(x) = 1/(\sqrt{x})$, $g'(x) = -8/(x^2)$, $h'(x) = 2x - e^x + 2/x$

zu 14.3: Richtig sind 2.) 3.) 4.)

zu 15.1: Die zugehörige Ableitungsfunktion kann wie folgt eingetragen werden.



zu 15.2: Zunächst bilden wir die 1. Ableitung $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 120x$ und setzen anschließend für $x = 4$ ein und erhalten damit die Steigung an der Stelle 4: $f'(4) = 80$.

zu 15.3: Die Ableitungsfunktion hat jedenfalls eine Nullstelle bei $x = 3$ und eine Extremstelle bei $x = 7$. Über alles andere kann man keine Aussagen treffen.

zu 15.4:

a)

1. Grenzverhalten:	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\to$	$-\infty$	
	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\to$	$-\infty$	
2. Symmetrie:	$f(-x)$	$\neq$	$f(x)$	
	$f(-x)$	$\neq$	$-f(x)$	
3. Nullstellen:	x_1	$=$	0	
	x_2	$=$	2	
4. y -Achse:	$f(0)$	$=$	0	
5. Def.-Bereich:	D	$=$	$\mathbb{R}$	
6. Wertebereich:	W	$=$	$(-\infty, 2]$	
7. Extrempunkte:	HP	bei	$(1\|2)$	
8. Wendepunkte:	keine			
9. Steigung:	$\nearrow$	auf	$(-\infty, 1]$	
	$\searrow$	auf	$[1, \infty)$	
10. Krümmung:	$\cap$	auf	$(-\infty, \infty)$	

b)

1. Grenzverhalten:	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\to$	∞
2. Symmetrie:	$f(-x)$	$\neq$	$f(x)$
	$f(-x)$	$\neq$	$-f(x)$
3. Nullstellen:	x	$=$	1
4. y -Achse:	n.d.		
5. Def.-Bereich:	D	$=$	$(0, \infty)$
6. Wertebereich:	W	$=$	$[-0{,}37, \infty)$
7. Extrempunkte:	TP	bei	$(0{,}37\| - 0{,}37)$
8. Wendepunkte:	keine		
9. Steigung:	$\nearrow$	auf	$[0{,}37, \infty)$
	$\searrow$	auf	$(0, 0{,}37]$
10. Krümmung:	$\cup$	auf	$(0, \infty)$

zu 16.1: Richtig sind 1.) 3.) 5.)

zu 16.2: Richtig sind 3.) 4.) 5.)

zu 16.3:

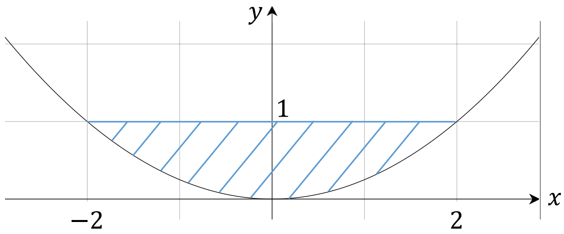
- Extremstelle: $f'(x) = 2x + a \to f'(3) = 2 \cdot 3 + a = 0 \Leftrightarrow a = -6$
- Nullstelle: $f(5) = 5^2 + 5a + b = 0 \Rightarrow a = -6$ einfügen und b ausrechnen: $b = 5$

zu 17.1:

1. $\int_0^2 x^2 + 2x - 3 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_0^2 = \frac{2}{3}$
2. $\int_{-1}^1 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = 0$
3. $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$
4. $\int_{-1}^2 e^{2x} + x \, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 \approx 28,73$

zu 17.2:

1. Der Fluss ist $f(2) = 1$ m tief, wenn er maximal 4 m breit ist.



2. Die Querschnittsfläche des Flusses ist die Fläche zwischen der Parallelen $g(x) = 1$ zur x-Achse und der Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2; 2]$:

$$A = \int_{-2}^{2} g(x) - f(x) \, dx = \int_{-2}^{2} 1 - 0,25x^2 \, dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + x\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} \text{ [FE]}$$

   Antwort: Die Querschnittsfläche des Flusses beträgt $8/3$ m^2.

zu 17.3: Richtig ist 2.)

zu 17.4: $\int_1^3 f(x) \, dx + \left|\int_3^7 f(x) \, dx\right|$

zu 17.5: $F(x) = x^3 + 2x^2|_2^5 = (5^3 + 2 \cdot 5^2)˘(2^3 + 2 \cdot 2^2) = 159$ Flächeneinheiten (FE)

4 zu Wahrscheinlichkeit und Statistik

zu 19.1:

zu a) $P(6) = \frac{\textit{günstig}}{\textit{möglich}} = 1/6 = 16{,}67\%$

zu b) $P(1) + P(6) = 1/6 + 1/6 = 1/3 \approx 33{,}33\%$

zu c) Der Würfel hat sechs Zahlen, davon sind drei (nämlich 2, 4, 6) gerade. Unsere Wahrscheinlichkeit beträgt also $P(2) + P(4) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2 = 50\%$

zu 19.2: Die Wahrscheinlichkeit beträgt $0{,}01 \cdot 0{,}0001 = 0{,}000001 = 0{,}0001\%$.

zu 19.3: Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \approx 0{,}1364 = 13{,}64\%.$$

zu 19.4:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \\ &\approx 71{,}43\% \end{aligned}$$

zu 19.5: $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$. Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten an.

zu 22.1: 1.) 2.) 3.) 4.)

zu 22.2: 3.) 5.)

zu 22.3: mit $n = 5$ und $p = 30/150 = 0{,}2$ folgt

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5\right] = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232 \approx 67{,}23\%$$

zu 22.4: mit $\mu = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}0013 = 13$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}0013 \cdot 0{,}9987} \approx 3{,}6$ folgt

$$P(X < 10) = \Phi\left(\frac{10 + 0{,}5 - 13}{3{,}603206905}\right) = \Phi(-0{,}69382) \approx 0{,}2451$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von zirka 25% werden höchstens 10 Flaschen falsch bedruckt.

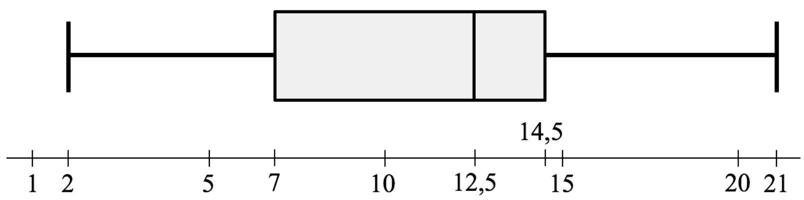
zu 22.5: mit $p = 2/80 = 0{,}025$, $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}025 = 10$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}975} \approx 3{,}12$ folgt

$$P(7 < X < 13) = P(X < 13)\text{˘}P(X < 7) = \Phi\left(\frac{13 + 0{,}5 - 10}{3{,}1224989}\right) - \Phi\left(\frac{7 + 0{,}5 - 10}{3{,}1224989}\right)$$
$$= \Phi(1{,}12089) - \Phi(-0{,}80064) = 0{,}8686\text{˘}0{,}2119 = 0{,}6567$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von zirka 65,67 % werden von 400 zwischen 7 und 13 Gurken aussortiert.

zu 23.1:

- Geordnete Liste: 2 4 6 8 9 12 13 14 14 15 17 21
- Aus Minimum: 2 und Maximum: 21 folgt die Spannweite: 19
- 1. Quartil: 2 - 7
- 2. Quartil: 7 - 12,5
- 3. Quartil: 12,5 – 14,5
- 4. Quartil: 14,5 -21



zu 23.2: 1.) 2.) 3.) 5.)

zu 24.1: Du brauchst grundsätzlich nur entweder die untere oder die obere Grenze einzusetzen, kannst zur Sicherheit aber auch beide berechnen. Das Ergebnis muss bei beiden dasselbe sein. Aus 99% Sicherheit folgt $z = 2,58$. Wir verwenden hier einfach die untere Grenze UG:

$$UG = \hat{p} - z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \Rightarrow 0{,}28 = 0{,}3\text{˘}2{,}58 \cdot \frac{0{,}3(1 - 0{,}3)}{n} \Leftrightarrow n \approx 3494{,}58$$

Du musst bei solchen Beispielen immer aufrunden, weil es ja nur ganze Personen gibt: $n = 3494$. Antwort: Es mussten mindestens 3494 Personen befragt werden.

zu 24.2: Die Länge des Konfidenzintervalls hängt von der angegebenen Sicherheit sowie der Stichprobengröße ab. Da die Sicherheit hier gleich bleiben soll, beeinflusst nur die Stichprobengröße die Länge des Intervalls. Werden mehr Personen gefragt, liegt der geschätzte Wert näher am tatsächlichen Wert, man wird also eine genauere Aussage treffen können. Das Konfidenzintervall wird schmäler.

σ-Regeln für **BINOMIAL**VERTEILUNGEN

Wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X) \approx 0{,}95$
	$P(X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X) \approx 0{,}975$
	$P(X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X) \approx 0{,}995$
	$P(X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \leq X) \approx 0{,}841$
	$P(X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \leq X) \approx 0{,}977$
	$P(X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \leq X) \approx 0{,}999$
	$P(X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Eine binomialverteilte Zufallsvariable X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Kumulierte **BINOMIAL**VERTEILUNGEN für $n = 10$ und $n = 20$

$$F(n,p,k) = B(n,p,0) + \ldots + B(n,p,k) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	k	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		n
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,000								0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,000								0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n,p,k) = 1 -$ abgelesener Wert.

NORMALVERTEILUNG

Merke: $\phi(z) = 0$,.... und $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

Beispiel: $\phi(2{,}32) = 0{,}9898$ oder $\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999