Lineare Algebra 1 für Lehramt

Lösungen

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Dr. Andreas Stahl
Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

1 Lösungen

1.1 zu Aussagenlogik und Mengentheorie

Lösung zu A.1.1

Im Folgenden wenden wir die im Heft angesprochenen Regeln zur Verneinung an.

a) Hier können wir einfach die Aussage verneinen und erhalten:

$$\text{Vanilleeis schmeckt nicht gut.}$$

b) Bei dieser Aussage liegt eine „und“ Verknüpfung vor, sodass wir die beiden Aussagen verneinen und das „und“ zum „oder“ umwandeln. Mit A = „Vanilleeis schmeckt gut“ und B = „Vanilleeis ist teuer“ erhalten wir:

$$\overset{\neg A}{\text{Vanilleeis schmeckt nicht gut}}\ \overset{\vee}{\text{oder}}\ \overset{B}{\text{ist teuer}}.$$

c) An dieser Stelle befindet sich eine Aussage mit „es gibt“, also dem Existenzquantor. Dies verneinen wir, indem wir den Teil in den Allquantor umwandeln und erhalten mit A =„Eissorte schmeckt gut“ x = Eissorte:

$$\overset{\forall x}{\text{Jede Eissorte}}\ \overset{\neg A}{\text{schmeckt nicht gut}}.$$

d) Bei dieser Aussage handelt es sich um eine „es gibt“ Konstruktion in Verbindung mit einer „und“ Aussage. Zunächst wandeln wir die „Existenzaussage“ zu einer „für alle“ Aussage um und verwenden für die Verneinung des logischen „und“ die bereits angesprochene Regel und wir erhalten mit A = „Eissorte schmeckt gut“ und B = „Eissorte ist teuer“:

$$\overset{\forall x}{\text{Jede Eissorte}}\ \overset{\neg A}{\text{schmeckt nicht gut}}\ \overset{\vee}{\text{oder}}\ \overset{B}{\text{ist teuer}}.$$

e) Diese Aussage ist komplizierter als nötig formuliert. Schauen wir genauer hin, steht dort lediglich, dass es ein gut schmeckendes Eis gibt, das nicht teuer ist, sodass wir durch Verneinung mit A = „Eissorte schmeckt gut“ und B= „Eissorte ist teuer“

$$\overset{\forall x}{\text{Jede Eissorte,}}\ \overset{\in A}{\text{die gut schmeckt,}}\ \overset{B}{\text{ist teuer}}.$$

erhalten.

f) Bei dieser Aussage handelt es sich um eine Implikation. Im Heft haben wir die Regel

$$A \to B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$$

gezeigt. Verneinen wir nun die äquivalente Darstellung mit A = „Eissorte schmeckt gut“ und B = „Eissorte ist teuer“, so erhalten wir:

$$\overset{A}{\text{Die Eissorte schmeckt gut}}\ \overset{\wedge}{\text{und}}\ \overset{\neg B}{\text{ist nicht teuer.}}$$

g) Im letzten Beispiel handelt es sich um eine Äquivalenz, die bedeutet, dass stets beide Aussagen zusammen wahr oder zusammen falsch sind. Verstehen wir die Äquivalenz als Implikation in beide Richtungen, so ist $A \leftrightarrow B \;=\; (A \to B) \wedge (B \to A)$. Mit Hilfe des letzten Beispiels und der Verneinung des logischen $\wedge$ erhalten wir für A = „Eissorte ist teuer“ und B = „Eissorte schmeckt gut“:

$$\text{(}\overset{A}{\text{Eine Eissorte ist teuer}}\ \overset{\wedge}{\text{und}}\ \overset{\neg B}{\text{schmeckt nicht gut}}\text{)}\ \overset{\vee}{\text{oder}}\ \text{(}\overset{\neg A}{\text{ist nicht teuer}}\ \overset{\wedge}{\text{und}}\ \overset{B}{\text{schmeckt gut}}\text{).}$$

Lösung zu A.1.2

a) Wir verneinen diese Aussage, indem wir statt des Existenzquantors den Allquantor benutzen, den Zusatz $n \in \mathbb{N}$ unverändert lassen und die nachfolgende Aussage verneinen. Dies ergibt

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; n \not\equiv 2 \bmod 3.$$

b) In diesem Fall liegt sowohl der Allquantor als auch der Existenzquantor vor. Diese werden bei der Verneinung umgedreht. Die Zusätze $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ werden übernommen und die abschließende Aussage wird verneint, sodass wir

$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} \;:\; n \leq x$$

erhalten.

c) Diese Aussage sieht auf den ersten Blick komplizierter aus, wenn wir die einzelnen Regeln anwenden, erreichen wir das Ziel wie in den bisherigen beiden Aufgaben. Zunächst drehen wir alle Quantoren um, also aus $\forall$ wird $\exists$ und andersherum. Die Zusätze $g \in G$ sowie $e \in G$ behalten wir bei und die Aussage zum Schluss wird negiert. Da diese Aussage komplizierter ist, gehen wir sukzessive vor und schreiben den Teil in der Mitte ausführlicher:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall g \in G\ (\exists g^{-1} \in G \wedge e \in G) \;:\; g * g^{-1} \;=\; e) \\
&\neg(\forall g \in G\ (\exists g^{-1} \in G \wedge \exists e \in G) \;:\; g * g^{-1} \;=\; e) \\
&\forall g \in G\ \neg((\exists g^{-1} \in G \wedge \exists e \in G) \;:\; g * g^{-1} \;=\; e) \\
&\forall g \in G\ (\forall g^{-1} \in G \vee \forall e \in G) \;: \neg(\, g * g^{-1} \;=\; e) \\
&\forall g \in G\ (\forall g^{-1} \in G \vee \forall e \in G) \;: (\, g * g^{-1} \;\neq\; e
\end{aligned}$$

Lösung zu A.1.3

Wir stellen zu beiden Aufgabenteilen Wahrheitstafeln auf und überprüfen, ob die Aussagen links und rechts vom Gleichheitszeichen die gleichen Wahrheitsgehalte liefern:

a) Insgesamt betrachten wir zwei Aussagen A und B, sodass wir insgesamt 4 Fälle betrachten müssen. In diesem Fall lautet die Wahrheitstafel:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

b) In der zweiten Aufgabe handelt es sich um insgesamt drei Aussagen, sodass wir mit unserer Regel 8 Fälle betrachten müssen. Wir starten dabei mit den Blöcken (w, w, w, w) und (f, f, f, f) für die Aussage A, mit (w, w), (f, f), (w, w), (f, f) für die Aussage B und w, f, w, f, w, f, w, f für die Aussage C. Zu besseren Übersicht starten wir mit der Negation und den einzelnen durch $\wedge$ verknüpften Aussagen:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg A \rightarrow B$	$B \wedge A$	$(B \wedge A) \rightarrow \neg C$	$C \vee \neg A$	$(C \vee \neg A) \rightarrow \neg B$
w	w	w	f	f	f	w	w	f	w	f
w	w	f	f	f	w	w	w	w	f	w
w	f	w	f	w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	f	w	f	w
f	w	w	w	f	f	w	f	w	w	f
f	w	f	w	f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	f	f	f	w	w	w
f	f	f	w	w	w	f	f	w	w	w

$B \wedge C$	$\neg(B \wedge C)$	$A \wedge \neg(B \wedge C)$	$(\neg A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge A) \rightarrow \neg C) \wedge ((C \vee \neg A) \rightarrow \neg B)$
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	w	w
f	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	w	f	f
f	w	f	f

Wir sehen also, dass die Wahrheitsgehalte der Aussagen links und rechts vom Gleichheitszeichen übereinstimmen und die Gleichheit somit gilt.

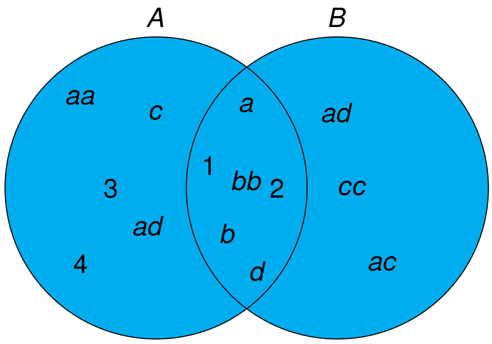
Lösung zu A.1.4
Anhand der bekannten Definition gilt:

a) Ist keine Menge, da der Wert a zweifach auftritt und somit die Unterscheidbarkeit der Elemente nicht gewährleistet ist.

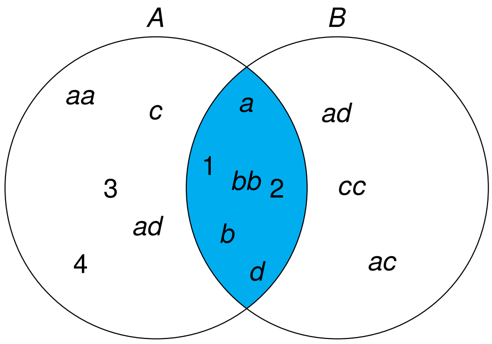
b) In diesem Fall ist keine Regel von Mengen verletzt, sodass es sich bei B um eine Menge handelt.

Lösung zu A.1.5
Anhand der Regeln zu Rechenoperationen von Mengen ergibt sich:

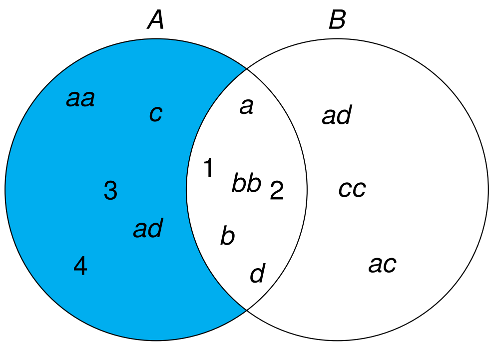
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \text{a, b, c, d, aa, ab, ac, ad, bb, cc}\}$, da in der Vereinigung alle Elemente (jeweils einfach) enthalten sind. Visuell sähe dies folgendermaßen aus:



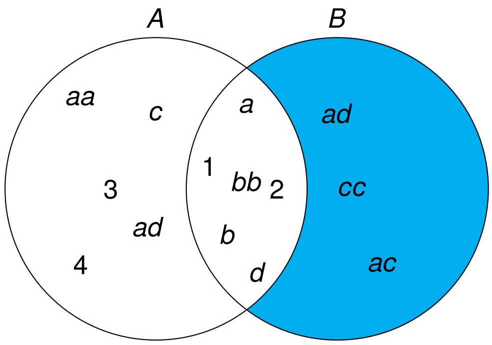
- $A \cap B = \{1, 2, \text{a, b, d, bb}\}$, da im Schnitt genau die Elemente enthalten sind, die in beiden Mengen vorkommen. Visuell ließe sich dies folgendermaßen darstellen:



- $A \setminus B = \{3, 4, \text{c, aa, ad}\}$, da wir alle Elemente aus A betrachten, die nicht gleichzeitig in B liegen. Visuell stellen wir dies durch folgende Grafik dar:



- $B \setminus A = \{\text{ac, ad, cc}\}$, da wir alle Elemente betrachten, die in B aber nicht gleichzeitig in A liegen. Visuell bedeutet dies:



Lösung zu A.1.6

a) Zunächst erkennen wir, dass eine Äquivalenz zu zeigen ist.

Bevor wir uns Gedanken machen, ob jeglicher Schritt im Beweis äquivalent ist, splitten wir den Beweis auf und beweisen

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \;\Rightarrow\; (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2).$$

Um den Aufwand weiter zu verkleinern, zeigen wir zunächst

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \;\Rightarrow\; (a_1 = a_2).$$

Diese Vereinfachungen sind nicht notwendig, strukturieren allerdings den Beweis und lassen uns kleinere Schritte fokussieren. Da wir eine Implikation zeigen wollen, dürfen wir die linke Seite als gegeben voraussetzen. Seien also zwei geordnete Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) mit $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ gegeben. Bei den meisten Beweisen starten wir mit der Betrachtung der Definition, für die wir jedoch eine Fallunterscheidung benötigen. Betrachten wir zunächst $a_1 \neq b_1$, so ist per Definition

$$(a_1, b_1) \;=\; \{a_1, \{a_1, b_1\}\}$$

eine Menge mit zwei Elementen, die jeweils wieder Mengen sind. Daraus folgt jedoch, dass $a_2 \neq b_2$ gelten muss, denn sonst wäre

$$\underbrace{\{a_1, \{a_1, b_1\}\}}_{\text{zwei Elemente}} \;=\; (a_1, b_1) \;=\; (a_2, b_2) \;=\; \{\;\underbrace{\{a_2\}}_{\text{ein Element}}\;\},$$

sodass wir eine Gleichheit von zwei zwei-elementigen Mengen haben:

$$\{a_1, \{a_1, b_1\}\} \;=\; \{a_2, \{a_2, b_2\}\}$$

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn ihre Elemente übereinstimmen, sodass für das Element $\{a_1\}$ folgt, dass

$$\{a_1\} \;=\; \{a_2\} \quad \text{oder } \{a_1\} \;=\; \{a_2, \{b_2\}\}$$

gelten muss. Betrachten wir die zweite Gleichung, so wird ersichtlich, dass diese Gleichheit nie erfüllt sein kann, da wir eine Menge mit einem Element auf der linken Seite und eine Menge mit zwei Elementen auf der rechten Seite vergleichen. Demnach folgt

$$\{a_1\} \;=\; \{a_2\}.$$

Analog erhalten wir, dass

$$\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$$

gelten muss. Da bereits $a_1 = a_2$ gilt, folgt somit, dass $b_1 = b_2$ gilt.

Betrachten wir nun den fehlenden Fall, dass $a_1 = b_1$ gilt. Dann ist $(a_1, b_1) = \{\{a_1\}\}$. Damit folgt, dass auch $a_2 = b_2$ gilt, denn sonst hätten wir erneut die Gleichheit einer Menge mit einem Element und einer Menge mit zwei Elementen, welche nicht möglich ist. Insgesamt folgt

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Rightarrow \{\{a_1\}\} = \{\{a_2\}\} \Rightarrow \{a_1\} = \{a_2\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

und wir haben die Hinrichtung bewiesen.

Für die Rückrichtung nehmen wir nun an, dass $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ gilt. Damit folgt trivialerweise $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, da auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen das Gleiche steht.

b) Der zweite Beweis ist ein klassischer Beweis für Mengen. Erneut fällt uns die Äquivalenz ins Auge, sodass wir uns zunächst auf die einzelnen Implikationen fokussieren:

Hinrichtung: $\Rightarrow$
Wir wollen zeigen, dass

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (A \cup B = B)$$

gilt. Dafür dürfen wir die linke Seite als gegeben hinnehmen, es sei also $A \subseteq B$.

Als Nächstes betrachten wir die nun zu zeigende Aussage:

$$A \cup B = B$$

Es handelt sich um eine Gleichheit von zwei Mengen. Ähnlich wie bei der Äquivalenz zeigen wir nicht direkt die Gleichheit, sondern jeweils die Teilmengeneigenschaft. Wir möchten also zeigen, dass

$$\begin{array}{cccc} i) & B & \subseteq & A \cup B \\ & & \text{und} & \\ ii) & A \cup B & \subseteq & B \end{array}$$

gelten.

i)
Für den Beweis einer Teilmenge müssen wir zeigen, dass jedes Element der einen Menge automatisch Element der Obermenge ist. Dies ist in diesem Fall trivialerweise korrekt, denn für beliebiges $x \in B$ gilt

$$x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in B \cup A.$$

Das logische „oder“ ist bereits wahr, wenn eine der Aussagen, also $x \in B$ wahr ist.

ii)
Für die zweite Teilmengeneigenschaft gehen wir analog vor. Erneut möchten wir zeigen, dass jedes Element bereits Element der zu zeigenden Obermenge ist. Sei dazu $x \in A \cup B$ beliebig, so gilt mit der Voraussetzung $A \subseteq B$

$$x \in A \cup B \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\overset{\text{nach Voraussetzung}}{\Rightarrow}\; x \in B \vee x \in B \;\Rightarrow\; x \in B.$$

Insgesamt haben wir beide Teilmengeneigenschaften gezeigt und somit auch die Gleichheit der Mengen.

Rückrichtung: $\Leftarrow$
Statt die Rückrichtung direkt zu zeigen, wählen wir an dieser Stelle den indirekten Beweis. Statt

$$(A \cup B = B) \;\Rightarrow\; (A \subseteq B)$$

zeigen wir

$$(A \not\subseteq B) \;\Rightarrow\; A \cup B \neq B.$$

Dies bedeutet <u>nicht</u>, dass es keine direkte Methode gibt. Wir entscheiden uns nur für eine mögliche andere Idee. In diesem Fall finden wir ein Element $x \in A$, welches nicht in B liegt, denn andernfalls würde die Teilmengeneigenschaft gelten. Für dieses fixierte x gilt aber nun

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cup B, \quad \text{aber nach Vorraussetzung ist } x \notin B,$$

sodass die Gleichheit $A \cup B = B$ bereits widerlegt ist. An dieser Stelle sehen wir nochmal die Eigenschaft des logischen „oders“. Wir wissen bereits, dass x nicht Element von B ist und trotzdem ist die Aussage $x \in A \vee x \in B$ immer wahr, wenn wir bereits wissen, dass $x \in A$ liegt.

Lösung zu A.1.7

a) Nach den Regeln für komplexe Zahlen gilt:

- $a+b = (1+i)+(2-3\cdot i) = (1+2)+(1-3)\cdot i = 3-2\cdot i$
- $a-b = (1+i)-(2-3\cdot i) = (1-2)+(1+3)\cdot i = -1+4\cdot i$
- $a\cdot b = (1+i)\cdot(2-3\cdot i) = (1\cdot 2+1\cdot 3)+(1\cdot(-3)+1\cdot 2)\cdot i = 5-i$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+i}{2-3\cdot i} = \dfrac{(1+i)\cdot(2+3\cdot i)}{(2-3\cdot i)\cdot(2+3\cdot i)} = \dfrac{(1\cdot 2-1\cdot 3)+(1\cdot 3+1\cdot 2)\cdot i)}{4+9} = -\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\cdot i$

b) Die Aussagen bewerten wir wie folgt:

- falsch, denn der Betrag von a lautet $|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- richtig
- richtig
- falsch, denn der Imaginärteil von a lautet 1. Sowohl der Real- als auch der Imaginärteil sind reelle Zahlen und führen keine imaginäre Einheit mit sich.

Lösung zu A.1.8

a) Bei dieser Gleichung gehen wir wie in $\mathbb{R}$ vor und es folgt

$$z^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z = 1 \vee z = -1.$$

b) Hier wenden wir die *pq*-Formel an und es folgt:

$$\begin{aligned} z^2 - 2\cdot z + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= \tfrac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - 3} \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{-2} \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2}\cdot i \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die beiden Lösungen $z = 1 + \sqrt{2}\cdot i$ und $z = 1 - \sqrt{2}\cdot i$.

c) Bei dieser Aufgabe bringen wir den rechten Teil der Grenze zunächst in die Polarkoordinatenform. Wir berechnen den Betrag und den Winkel durch

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Da wir die dritte Potenz betrachten gilt $n = 3$ und wir berechnen für $k = 0, 1, 2$

$$z^3 = i \;\Leftrightarrow\; z^3 = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi\cdot i} \;\Leftrightarrow\; z = e^{\frac{\pi}{6} + \frac{2\cdot\pi\cdot i}{3}\cdot k}.$$

Insgesamt erhalten wir die drei Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} \\ z_2 &= e^{i\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{2\cdot\pi\cdot i}{3}} \\ z_3 &= e^{i\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{4\cdot\pi\cdot i}{3}} \end{aligned}$$

d) Bei der letzten Gleichung wenden wir erneut die *pq*-Formel an. Das Auftreten von komplexen Koeffizienten ändert am Vorgehen nichts. Es gilt:

$$\begin{aligned} z^2 - 3\cdot z + 3 + i &= 0 \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 3 - i} \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - 3 - i} \\ \Leftrightarrow\; z_{1,2} &= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4} - i}. \end{aligned}$$

Es bleibt somit die Bestimmung der Wurzel. Dazu stellen wir die komplexe Zahl um und erkennen, dass sich die Wurzel in diesem Fall sehr elegant mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen lässt. Es gilt

$$-\frac{3}{4} - i = \frac{-3 - 4\cdot i}{4} = \frac{1 - 4\cdot i - 4}{4} = \frac{1 - 4\cdot i + 4\cdot i^2}{4} = \frac{(1 - 2\cdot i)^2}{4}.$$

Wer diesen Weg nicht sieht, kann mit den bekannten Methoden zum Ziehen von Wurzeln komplexer Zahlen vorgehen und beispielsweise die Polarkoordinaten benutzen. Auf diese Weise müssen wir jedoch nicht explizit sin und cos auswerten, um eine Darstellung in der Form $a + b\cdot i$ zu erhalten. Mit obiger Überlegung folgt nun

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - 2\cdot i)^2}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1 - 2\cdot i}{2}$$

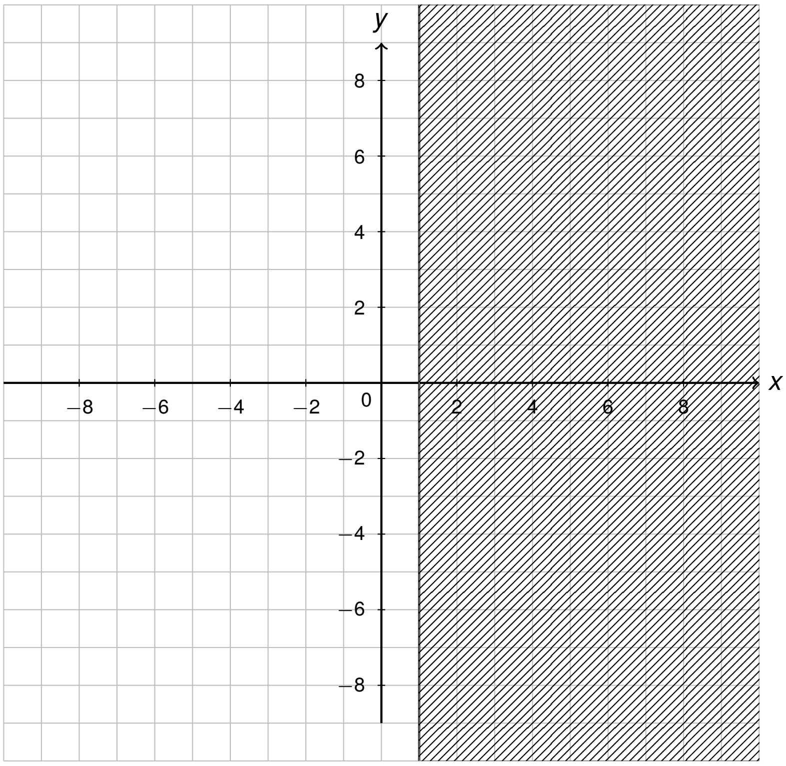
und wir erhalten die beiden Lösungen $z_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1 - 2\cdot i}{2} = 2 - i$ und $z_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1 - 2\cdot i}{2} = 1 + i$.

Lösung zu A.1.9

a) Im ersten Beispiel betrachten wir die Ungleichung

$$\mathrm{Re}(z) > 1.$$

Dies ist für $z = a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ äquivalent zu $a > 1$ und die Menge lässt sich durch folgenden schraffierten Bereich in ein Koordinatensystem zeichnen:



b) In diesem Fall betrachten wir die Gleichung

$$|z| \leq 4.$$

Mit Anwendung des Betrags und anschließender Quadrierung ergibt sich für $z = a + b \cdot i$

$$|z| \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \leq 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 16.$$

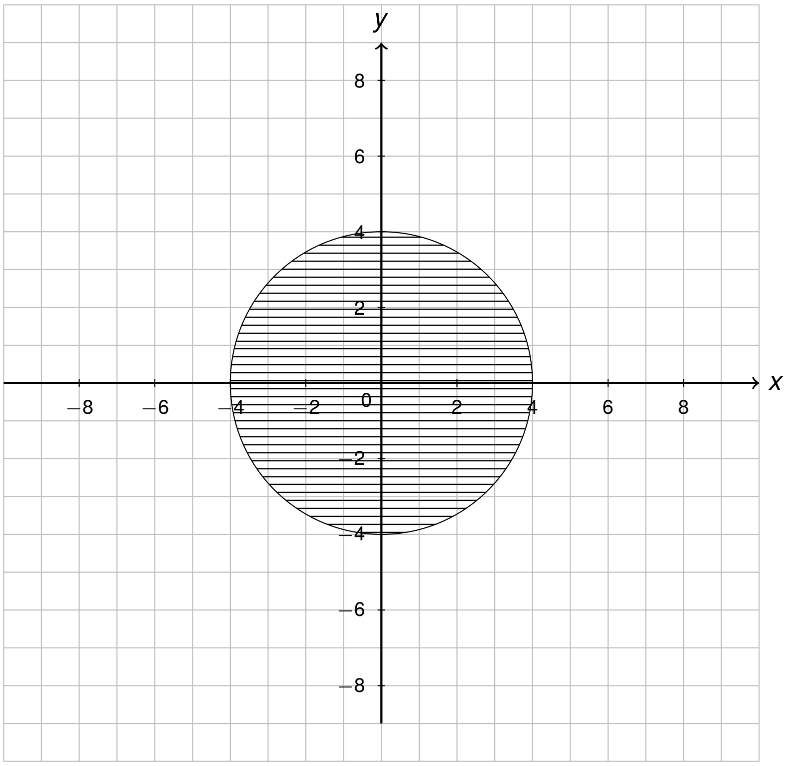
Dies ist eine klassische Kreisgleichung mit Radius 4, denn stellen wir dies nach b um, erhalten wir

$$b^2 \leq 16 - a^2.$$

Ziehen wir nun die Wurzel, müssen wir beachten, dass $\sqrt{b^2} = |b|$ gilt, sodass wir zwei Vorzeichen erhalten:

$$b = \pm\sqrt{16 - a^2}$$

Somit erhalten wir zwei Kurven für b als Variable in Abhängigkeit von a, die einen Kreis ergeben und sich durch folgende schraffierte Fläche in ein Koordinatensystem zeichnen lassen:


y
8
6
4
2
x
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
−2
−4
−6
−8

1.2 zu Abbildungen

Lösung zu A.2.1

Dies beantworten wir, indem wir die nötigen Regeln für Äquivalenzrelationen durchgehen. Zur Wiederholung fassen wir die zu zeigenden Eigenschaften nochmal für eine Menge R zusammen:

$$\begin{aligned}\text{Reflexivität} &: \ \forall\, a\ :\ (a,a)\in R\\ \text{Symmetrie} &: \ \text{Ist } (a,b)\in R,\ \text{so gilt auch } (b,a)\in R\\ \text{Transitivität} &: \ \text{Sind } (a,b),(b,c)\in R,\ \text{so gilt auch } (a,c)\in R\end{aligned}$$

- **Reflexivität:**
  Da es sich lediglich um die Elemente 1, 2 und 3 handelt, ist die durch diese Menge induzierte Relation reflexiv, denn es ist sowohl $(1,1)$, $(2,2)$ als auch $(3,3)$ in der Menge enthalten.
- **Symmetrie:**
  Für die Symmetrie müssen wir überprüfen, dass mit (a,b) für jede Kombination von a und b auch gleichzeitig (b,a) in der Menge enthalten ist. Dies gilt trivialerweise für Paare (a,a), sodass lediglich die beiden Paare $(1,2)$ und $(2,1)$ übrig bleiben. Da diese die symmetrische Bedingung erfüllen, ist die Relation auch symmetrisch.
- **Transitivität:**
  Für die Transitivität müssen wir zeigen, dass für Paare (a,b) und (b,c) für jede Konstellation von a,b und c auch gleichzeitig (a,c) in der Menge enthalten ist. Da $(3,3)$ das einzige Paar mit dem Wert 3 ist, ist die Transitivität aufgrund der Symmetrie für zwei Elemente immer erfüllt.

Insgesamt handelt es sich bei dieser Menge und der dadurch induzierten Relation also um eine Äquivalenzrelation.

Lösung zu A.2.2

a) Bei dieser Aufgabe möchten wir die Injektivität von f beweisen, das bedeutet, wir wollen für $x_1, x_2 \in X$ die Aussage

$$f(x_1) = f(x_2) \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2$$

zeigen. Also nehmen wir zwei beliebige Elemente x_1 und x_2 als gegeben voraus und dürfen aufgrund der zu zeigenden Implikation zusätzlich annehmen, dass für diese Werte bereits

$$f(x_1) = f(x_2)$$

gilt. Die einzig verbleibende Information lautet, dass $g \circ f$ bereits injektiv ist. Wir wissen also, dass für unsere beiden Werte x_1 und x_2

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2$$

folgt. Nun ist g eine Abbildung, das bedeutet, sie ist rechtseindeutig, also existiert zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $z \in Z$, sodass $g(y) = z$. In unserem Fall liegen nun zwei Werte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ vor, die nach Voraussetzung identisch sind, sodass deren Bilder aufgrund der Rechtseindeutigkeit ebenfalls gleich sein müssen. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt somit $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ und mit der Injektivität von $g \circ f$ folgt wiederum $x_1 = x_2$, sodass f injektiv ist.

b) Bei dieser Aufgabe möchten wir beweisen, dass die Abbildung g surjektiv ist, also dass

$$\text{für jedes } z \in Z \text{ existiert ein } y \in Y, \text{ sodass } g(y) = z$$

gilt. Wir dürfen verwenden, dass die Abbildung $g \circ f$ bereits surjektiv ist, also, dass

$$\text{für jedes } z \in Z \text{ ein } x \in X \text{ existiert, sodass } g(f(x)) = z$$

gilt. Damit ist der Beweis direkt erbracht, denn mit dieser Voraussetzung finden wir zu jedem z ein x, sodass mit $f(x) = y \in Y$ Folgendes gilt:

$$z = g(f(x)) = g(y)$$

Wir finden somit zu jedem z des Zielbereichs Z ein $y = f(x)$, sodass $g(y) = z$ gilt, damit ist g surjektiv.

Lösung zu A.2.3
Für eine Äquivalenzrelation muss Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gelten. Betrachten wir dies für die obigen Relationen, so gilt:

a) Bei diesem Beispiel handelt es sich nicht um eine Äquivalenzrelation, denn die angegebene Relation ist nicht symmetrisch. Beispielweise ist 2 ein Teiler von 4, aber 4 kein Teiler von 2. Die Relation ist jedoch

- asymmetrisch: wenn für verschiedene ganze Zahlen x ein Teiler von y ist, so ist $x < y$. Damit kann y kein Teiler mehr von x sein.
- antisymmetrisch: wenn x ein Teiler von y ist, ist $x \leq y$ und y ein Teiler von x, gilt $y \leq x$. In Kombination folgt somit $x = y$.
- transitiv: wenn x ein Teiler von y ist, also $y = k_1 \cdot x$ und y ein Teiler von z ist, also $z = k_2 \cdot y$, dann ist x ein Teiler von z, denn es ist $z = k_2 \cdot y = k_2 \cdot k_1 \cdot x$.

Sie ist insbesondere nicht reflexiv, da $0 \not\sim 0$ gilt.

b) Diese Relation ist ein Spezialfall der ersten Relation mit getauschten Rollen. Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\frac{x}{y} = 2^n$ gilt, so ist y ein Teiler von x. Somit ist auch an dieser Stelle die Symmetrie verletzt. Wie im vorigen Beispiel ist diese Relation nur noch asymmetrisch, insbesondere nicht mehr transitiv. Betrachten wir $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so existieren natürliche Zahlen k und n, sodass

$$\frac{x}{y} = 2^n \quad \text{sowie} \quad \frac{y}{z} = 2^k.$$

Für $x \sim z$ folgt somit durch Erweitern mit y

$$\frac{x}{z} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}} = \frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k},$$

allerdings ist $n - k$ im Allgemeinen keine natürliche Zahl mehr.

c) **Reflexivität:**
Betrachten wir das beliebige Element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so gilt $(x, y) \sim (x, y)$, denn

$$x_2 \cdot y_1 = x \cdot y = x_1 \cdot y_2.$$

Symmetrie:
Seien zwei Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ gegeben. Das bedeutet, es gilt $x_2 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_2$. Damit folgt direkt $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$, denn ist $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$ nach Voraussetzung (wir haben nur die Seiten vertauscht).

Transitivität:
Nehmen wir nun an, dass für drei Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ bereits die Beziehungen

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$$

bekannt sind. Für die Transitivität muss dann $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3) \Leftrightarrow x_3 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_3$ folgen. Aus den Voraussetzungen sind bereits

$$\begin{array}{rrcl} 1) & x_2 \cdot y_1 & = & x_1 \cdot y_2 \\ & & \text{und} & \\ 2) & x_3 \cdot y_2 & = & x_2 \cdot y_3 \end{array}$$

bekannt. Nun beginnen wir mit der einen Seite der zu zeigenden Gleichung $x_3 \cdot y_1$ und benutzen die anderen Gleichungen nach einer passenden Erweiterung. Diese ist so gewählt, dass stets eine der obigen beiden Gleichungen benutzt werden kann und ist nicht eindeutig. In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned} x_3 \cdot y_1 &= x_3 \cdot y_1 \cdot \frac{y_2}{y_2} \\ &= x_3 \cdot y_2 \cdot \frac{y_1}{y_2} \\ &\overset{2)}{=} x_2 \cdot y_3 \cdot \frac{y_1}{y_2} \\ &= x_2 \cdot y_1 \cdot \frac{y_3}{y_2} \\ &\overset{1)}{=} x_1 \cdot y_2 \cdot \frac{y_3}{y_2} \\ &= x_1 \cdot y_3 \cdot \frac{y_2}{y_2} \\ &= x_1 \cdot y_3 \end{aligned}$$

Damit ist die Relation insgesamt reflexiv, symmetrisch und transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.

Lösung zu A.2.4
Diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. Wir starten im dem ersten Teil mit der größeren Zahl 17 und dem erstem Teiler 13:

$$\begin{array}{rcrcl} 17 & = & 1\cdot 13 & + & 4 \\ 13 & = & 3\cdot 4 & + & 1 \end{array}$$

Somit erkennen wir, dass $ggT(13,17) = 1$ gilt und die Gleichung eine Lösung besitzt. Diese ermitteln wir durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{rcrcc} 1 & = & 13 & - & 3\cdot 4 \\ 1 & = & 13 & - & 3\cdot(17-1\cdot 13) \\ 1 & = & 4\cdot 13 & - & 3\cdot 17 \end{array}$$

Die gesuchten Zahlen sind $s = 4$ und $t = -3$.

Lösung zu A.2.5

a) Bei dieser Aufgabe handelt es sich um die Gleichheit von Mengen, sodass wir statt direkt die Gleichheit nur eine Teilmengeneigenschaft beweisen und uns am Ende überlegen, ob wir bereits ausschließlich äquivalente Umformungen gemacht haben. Um die Teilmengeneigenschaft zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges x aus der Teilmenge und leiten logisch her, dass dieses x bereits Element der Obermenge sein muss. In diesem Fall starten wir mit:

$f^{-1}(A\cap B) \subseteq f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$:

Sei $x \in f^{-1}(A\cap B)$ beliebig aber fest. Nun wandeln wir nach und nach die Mengenoperationen und die Abbildungsvorschrift in Logik um. Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} x\in f^{-1}(A\cap B) & \Rightarrow & f(x)\in A\cap B \\ & \Rightarrow & f(x)\in A \;\wedge\; f(x)\in B \\ & \Rightarrow & x\in f^{-1}(A) \;\wedge\; x\in f^{-1}(B) \\ & \Rightarrow & x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B). \end{array}$$

Damit haben wir $f^{-1}(A\cap B) \subseteq f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ gezeigt.

$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A\cap B)$:

Alle oben getätigten Implikationen können wir an dieser Stelle auch von unten nach oben lesen, sodass wir ausschließlich äquivalente Umformungen gemacht haben. Damit folgt automatisch die Rückrichtung. Der Vollständigkeit halber notieren wir:

$$\begin{array}{rcl} x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) & \Rightarrow & x\in f^{-1}(A) \;\wedge\; x\in f^{-1}(B) \\ & \Rightarrow & f(x)\in A \;\wedge\; f(x)\in B \\ & \Rightarrow & f(x)\in A\cap B \\ & \Rightarrow & x\in f^{-1}(A\cap B) \end{array}$$

Lösung zu A.2.6
Wir bestimmen die Umkehrfunktion, indem wir zunächst den Funktionswert gleich y setzen und nach p auflösen. Die Wahl der Variable p statt der üblichen Variable x ändert nichts an diesem Vorgehen. Anschließend tauschen wir die Variablen, um erneut eine Funktion in Abhängigkeit von p zu bekommen. Es gilt:

$$\begin{aligned} y = f(p) &= \sqrt{p}+1 \\ \Leftrightarrow \quad y-1 &= \sqrt{p} \\ \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 &= p. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir in diesem Fall die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ mit $f^{-1}(p) = (y-1)^2$.

Lösung zu A.2.7
Wir starten mit der Definition des Bilds. Das Bild einer Menge bezüglich einer Abbildung f ist diejenige Menge, die herauskommt, indem jedes Element abgebildet wird. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{Bild von } A \text{ unter } f \;:\; f(A) &= f([-1,1]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-1,1] \;:\; f(x) = y\} \\ \text{Bild von } B \text{ unter } f \;:\; f(B) &= f([0,\infty)) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0,\infty) \;:\; f(x) = y\} \end{aligned}$$

Für das Urbild erhalten wir gerade die Elemente des Definitionsbereichs, die in die betrachtete Menge abgebildet wird:

$$\begin{aligned} \text{Urbild von } A \text{ unter } f \;:\; f^{-1}(A) &= f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in [-1,1] \;:\; f(x) = y\} \\ \text{Urbild von } B \text{ unter } f \;:\; f^{-1}(B) &= f^{-1}([0,\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in [0,\infty) \;:\; f(x) = y\} \end{aligned}$$

Lösung zu A.2.8

a) Wir starten mit der Surjektivität. Hier fällt uns ins Auge, dass eine quadratische Funktion niemals negativ werden kann und somit vermuten wir, dass die Funktion nicht surjektiv ist, da im Zielbereich alle reellen Zahlen getroffen werden müssten. In diesem Fall reicht es also, ein Gegenbeispiel anzugeben. Betrachten wir beispielsweise $y = -2$, so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 &= -2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= -1. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt für den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ keine Lösung, sodass f nicht surjektiv ist.

Für die Injektivität vermuten wir aufgrund der quadratischen Funktion im Bezug zum Definitionsbereich ebenfalls, dass diese nicht erfüllt ist. Betrachten wir beispielsweise die Werte $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$, so folgt $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$. Wir finden zu einem gegebenen Wert des Zielbereichs zwei unterschiedliche Elemente des Definitionsbereichs, die auf diesen abgebildet werden, sodass f nicht injektiv ist.

Da f weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

b) Erneut starten wir mit der Surjektivität. Wie im vorherigen Beispiel vermuten wir aufgrund der quadratischen Funktion und negativen Werten im Zielbereich, dass die Funktion nicht surjektiv ist. Beispielsweise für $y = -1$ erhalten wir die Gleichung $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = -1$, welche über $\mathbb{N}$ keine Lösung besitzt, sodass die Funktion g nicht injektiv ist.

   Für die Injektivität handelt es sich zwar um eine quadratische Funktion, allerdings befinden sich im Definitionsbereich lediglich positive Zahlen, sodass wir vermuten, dass die Funktion injektiv ist. Daher müssen wir die Regel formal beweisen. Seien also $x_1 x_2 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gegeben. Wir werden zeigen, dass damit $x_1 = x_2$ folgt. Es gilt

$$\begin{array}{rrcll} & f(x_1) & = & f(x_2) & \\ \Leftrightarrow & x_1^2 & = & x_2^2 & \sqrt{\cdots} \\ \Leftrightarrow & |x_1| & = & |x_2| & \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & x_2. & \end{array}$$

   Dabei haben wir zum einen benutzt, dass die Wurzel aus einer quadrierten Zahl dem Betrag entspricht und zum anderen, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|n| = n$. Mit obigen Äquivalenzumformungen haben wir gezeigt, dass die Funktion g injektiv ist.

   Da g zwar injektiv, jedoch nicht surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

c) Für die Surjektivität der Funktion h sehen wir keine Einschränkung, sodass wir diese formal beweisen. Wir zeigen, dass für jedes beliebige Element y des Zielbereichs, ein Element x des Definitionsbereichs existiert, sodass $f(x) = y$. Dazu stellen wir folgende Rechnung auf:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & y \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} & = & y \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{y}. \end{array}$$

   Dabei sind diese Änderungen äquivalent, da sowohl im Definitions- als auch im Zielbereich keine 0 enthalten ist, sodass wir fälschlicherweise durch 0 dividieren würden. Sei $y \in [1, \infty)$ beliebig, so setzen wir $x = \frac{1}{y}$ und es folgt

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y,$$

   sodass wir zu jedem y ein Element des Definitionsbereichs gefunden haben, sodass dieses auf y abgebildet wird. Damit ist h surjektiv.

   Neben der Surjektivität vermuten wir, dass h ebenfalls injektiv ist, da keine Einschränkungen ins Auge springen. Wir beweisen daher formal:
   Seien $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, dann folgt

$$\begin{array}{rrcl} & f(x_1) & = & f(x_2) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x_1} & = & \frac{1}{x_2} \\ \Leftrightarrow & x_2 & = & x_1, \end{array}$$

   sodass h ebenfalls injektiv ist.

   Da h sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist die Funktion ebenfalls bijektiv. Dieses Ergebnis erhalten wir auch aus der Angabe einer Umkehrfunktion, welche wir im Abschnitt der Surjektivität berechnet haben. Wenn wir hier nur äquivalente Umformungen machen, erhalten wir die Umkehrfunktion und die Existenz der Umkehrfunktion ist äquivalent zur Bijektivität der Funktion.

Lösung zu A.2.9
Starten wir bei dieser Aufgabe mit der Surjektivität. Da sowohl im Definitions- als auch im Zielbereich jeweils die gesamte Potenzmenge betrachtet wird (einzeln oder im Kreuzprodukt), hilft uns folgende Überlegung:

Für ein beliebiges $A \in \mathscr{P}(X)$ gilt

$$f((A, \emptyset)) = A \cup \emptyset = A.$$

Wir finden somit für jedes Element des Zielbereichs A ein Element des Definitionsbereichs $(A, \emptyset)$, sodass $f((A, \emptyset)) = A$ folgt. Damit ist die Abbildung für jede Menge X surjektiv.

Aus obiger Vorüberlegung erkennen wir, dass das Element des Definitionsbereichs im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Es ist für beliebiges $a \in \mathscr{A}$:

$$f((A, \emptyset)) = f((\emptyset, A)) = A.$$

Der einzige Fall, bei dem auf diese Weise nicht zwei verschiedene Elemente erzeugt werden, die auf A abgebildet werden, ist bei $A = \emptyset$. Daher gilt:

- f ist injektiv, wenn $X = \emptyset$.
- f ist nicht injektiv, wenn $X \neq \emptyset$.

1.3 zu Gruppen, Ringe und Körper

Lösung zu A.3.1
Diese Aufgabe ist sehr offen formuliert, sodass wir uns zunächst einige Gedanken notieren und strukturiert zur Lösung gelangen:

- Eine Halbgruppe ist eine Struktur einer Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $*$.
- In der Halbgruppe soll zusätzlich zu jedem Element ein Linksinverses existieren.
- Die Existenz von Inversen, in diesem Fall linksinversen Elementen, impliziert die Existenz eines neutralen Elements (was soll „invers" sonst bedeuten?).
- Anhand der Ausführungen des Kapitels über Gruppen wissen wir, dass die Existenz von linksinversen Elementen und einem linksneutralen Element dazu führt, dass es sich um eine Gruppe handelt. Daher interessieren wir uns in diesem Fall speziell für ein rechtsneutrales Element.

Anhand dieser Überlegungen „bauen" wir nun eine Halbgruppe und starten dabei mit möglichst wenig Elementen. Eine Menge mit nur einem Element scheidet dabei aus, denn es müsste das rechtsneutrale Element enthalten sein und mit nur einem Element folgen immer alle Gruppeneigenschaften.

Dies bedeutet, wir betrachten eine Menge $G = \{e, a\}$ mit einer Verknüpfung $*$. Dabei identifizieren wir e als das rechtsneutrale Element. Nun müssen wir $*$ so definieren, dass jedes Element ein Linksinverses besitzt, aber $(G, *)$ keine Gruppe ist. Es gilt:

- Per Definition eines rechtsneutralen Elements muss $e * e = e$ sowie $a * e = a$ gelten.
- Da aus der Existenz eines linksneutralen Elements mit der Existenz von Linksinversen automatisch folgt, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist, darf e nicht linksneutral sein. Damit folgt $e * a = e$.
- Ebenso, darf nicht zu jedem Element ein rechtsinverses Element existieren, denn mit der Existenz eines rechtsneutralen Elements erhalten wir wieder eine Gruppe, sodass $a * a = a$ folgen muss.

Damit ist die Verknüpfung $*$ vollständig erklärt und es handelt sich per Konstruktion bei $(G, *)$ nicht um eine Gruppe.

Lösung zu A.3.2
Bei diesem Beweis dürfen wir verwenden, dass es sich bei U_1 und U_2 bereits um Untergruppen von G handelt. Damit es sich bei $U_1 \cap U_2$ um eine Untergruppe von G handelt, müssen wir zeigen:

1. für alle $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$ ist $u_1 * u_2 \in U_1 \cap U_2$.
2. für alle $u \in U_1 \cap U_2$ ist $u^{-1} \in U_1 \cap U_2$.

Dazu nutzen wir, dass ein Element im Schnitt automatisch in beiden Mengen liegen muss. Damit folgt:

1. Seien $u_1\, u_2 \in U_1 \cap U_2$ beliebig. Dann ist per Definition $u_1, u_2 \in U_1$ und $u_1, u_2 \in U_2$. Da U_1 eine Untergruppe ist, folgt $u_1 * u_2 \in U_1$ und da U_2 ebenfalls eine Untergruppe ist, folgt $u_1 * u_2 \in U_2$. Da die Verknüpfung $u_1 * u_2$ in beiden Untergruppen enthalten ist, ist sie demnach auch im Schnitt enthalten, also gilt $u_1 * u_2 \in U_1 \cap U_2$.
2. Sei $u \in U_1 \cap U_2$ beliebig. Dann ist per Definition $u \in U_1$ und $u \in U_2$. Da U_1 eine Untergruppe ist, ist $u^{-1} \in U_1$ und da U_2 eine Untergruppe ist, gilt $u^{-1} \in U_2$. Da u^{-1} sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt, ist es im Schnitt enthalten, also gilt $u^{-1} \in U_1 \cap U_2$.

Damit ist $U_1 \cap U_2$ ebenfalls eine Untergruppe.

Lösung zu A.3.3

a) Wir wollen zeigen, dass G abelsch ist, das bedeutet, dass die Verknüpfung $*$ kommutativ ist, also dass

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.

Dazu dürfen wir benutzen, dass jedes Element zu sich selbst invers ist, also dass für alle $g \in G$ die Gleichung

$$g * g = e$$

erfüllt ist.

Um die Kommutativität zu beweisen, bringen wir in $g_1 * g_2$ mittels neutralem Element den „getauschten“ Term $g_2 * g_1$ ein und sehen, dass sich der Rest von selbst aufhebt. Im Folgenden bedeutet (e), dass die Eigenschaft des linearen Elements, (a), dass die Assoziativität und (v), dass die Voraussetzung aus der Aufgabenstellung benutzt wurde. Es gilt:

$$\begin{aligned}
g_1 * g_2 &\overset{(e)}{=} g_1 * g_2 * e \\
&\overset{(v)}{=} g_1 * g_2 * ((g_2 * g_1) * (g_2 * g_1)) \\
&\overset{(a)}{=} g_1 * (g_2 * g_2) * g_1 * g_2 * g_1 \\
&\overset{(v)}{=} g_1 * e * g_1 * g_2 * g_1 \\
&\overset{(e)}{=} g_1 * g_1 * g_2 * g_1 \\
&\overset{(v)}{=} e * g_2 * g_1 \\
&\overset{(e)}{=} g_2 * g_1
\end{aligned}$$

b) Bei dieser Aufgabe erhalten wir die Aussage direkt aus der Voraussetzung. Da für alle $g_1, g_2 \in G$ die Gleichung

$$g_1 \circ g_2 \circ g_1 \circ g_2 = e$$

erfüllt ist, ist diese insbesondere für $g_2 = e$ erfüllt. Damit erhalten wir

$$g_1 \circ g_1 = e.$$

Da dies <u>für alle</u> $g_1 \in G$ gilt, folgt die Behauptung.

Lösung zu A.3.4

Für die Bestimmung des Vorzeichens $sign(\sigma)$ gibt es mehrere Möglichkeiten. Da wir laut Aufgabenstellung die Permutation in Zykelschreibweise angeben sollen, wählen wir den Weg über die Anzahl an Transpositionen und beginnen mit der Zykelschreibweise:

Wir starten mit dem Element 1. Dieses wird auf die Zahl 6 abgebildet. Im Anschluss die 6 auf 4, die 4 auf 5, die 5 auf die 2, die 2 auf die 3 und schlussendlich die 3 auf die 1. Damit ergibt sich

$$\sigma = (1, 6, 4, 5, 2, 3).$$

Nun schreiben wir diese Permutation künstlich in Transpositionen:

$$\sigma = (1, 6)(6, 4)(4, 5)(5, 2)(2, 3).$$

Mit den Transpositionen erhalten wir direkt das Vorzeichen durch

$$sign(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl Transpositionen}} = (-1)^5 = -1.$$

Lösung zu A.3.5

Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir den Multiplikationssatz des Signums: Für zwei Permutationen σ und τ der Länge n gilt

$$sign(\sigma \circ \tau) = sign(\sigma) \cdot sign(\tau).$$

Wählen wir an dieser Stelle $\tau = \sigma^{-1}$ so erhalten wir

$$sign(\sigma) \cdot sign(\sigma^{-1}) = sign(\sigma \circ \sigma^{-1}) = sign(id) = 1$$

und da das Vorzeichen stets verschieden von 0 ist, folgt

$$sign(\sigma^{-1}) = \frac{1}{sign(\sigma)} = sign(\sigma)^{-1}.$$

Aufgrund der möglichen Werte von $sign(\sigma)$ (1 und -1) ist $sign(\sigma) = sign(\sigma)^{-1}$ und daher

$$sign(\sigma^{-1}) = sign(\sigma).$$

Lösung zu A.3.6

a) Der sogenannte Nullring mit $0 + 0 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0$ erfüllt alle Bedingungen eines Rings.

b) $R = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Ring, da $(\mathbb{N}, +)$ keine abelsche Gruppe ist, denn es existiert beispielsweise zu 1 kein inverses Element (bezüglich der Addition) in $\mathbb{N}$.

c) Die ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden einen Ring.

Lösung zu A.3.7
Diesen Beweis können wir direkt mit der Voraussetzung $a < b$ führen:

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

Lösung zu A.3.8

a) Im Heft haben wir bereits gezeigt, dass $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und somit auch für $x = -1$ gilt. Da zudem das Kommutativgesetz $(K10)$ gilt, folgt somit die Behauptung.

b) Bei dieser Aussage handelt es sich um eine „genau dann, wenn“ Konstruktion, also um eine Äquivalenz, sodass wir beide Richtungen getrennt voneinander zeigen.

   Starten wir mit der Hinrichtung: Wenn $a \cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

   Ist $a = 0$, so folgt aus der Aussage $0 \cdot x = 0$, welche wir bereits im Heft bewiesen haben und im Folgenden durch „Zusatz“ markieren möchten, die Korrektheit der Gleichung. Nehmen wir also im Folgenden an, dass $a \neq 0$ ist. Diese Fallunterscheidung nehmen wir vor, damit wir nun das inverse Element von a bezüglich der Multiplikation bilden können, welches für $a = 0$ nicht existiert. Damit erhalten wir

$$\begin{array}{rrcll} & a \cdot b & = & 0 & \\ \Rightarrow & a^{-1} \cdot a \cdot b & = & a^{-1} \cdot 0 & \text{Assoziativität (K7) und Zusatz} \\ \Rightarrow & (a^{-1} \cdot a) \cdot b & = & 0 & \text{inverses Element (K9)} \\ \Rightarrow & (1) \cdot b & = & 0 & \text{Assoziativität}(K7) \\ \Rightarrow & 1 \cdot b & = & 0 & \text{neutrales Element (K8)} \\ \Rightarrow & b & = & 0. & \end{array}$$

   Damit gilt, dass entweder $a = 0$ ist oder im Fall von $a \neq 0$, direkt $b = 0$ folgt.

   Die Rückrichtung erhalten wir direkt aus dem Zusatz und der Kommutativität der Multiplikation:

   Sei $a = 0$ so ist nach dem Zusatz $a \cdot b = 0$. Ist $b = 0$ so folgt $a \cdot b = b \cdot a = 0$.

   Natürlich kann man ebenso zeigen, dass $x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt, aber da wir im Heft lediglich den Zusatz bewiesen haben, wenden wir nur diesen an.

c) Diese Aussage beweisen wir ähnlich wie die Eindeutigkeit der inversen Elemente. Zunächst starten wir mit einem inversen Element von $-a$ und bringen das neutrale Element der Addition in den Term. Anschließend ersetzen wir das neutrale Element durch eine Summe von $-a$ mit dem anderen inversen Element und wenden Körperaxiome an. Es gilt:

$$a \overset{(K3)}{=} a + 0 \overset{(K4)}{=} a + ((-a) + (-(-a))) \overset{(K2)}{=} (a + (-a)) + (-(-a)) \overset{(K4)}{=} 0 + (-(-a)) \overset{(K3)}{=} -(-a).$$

Lösung zu A.3.9

a) Wir starten mit der Division von 876 durch 312 mit Rest und erhalten:

$$\begin{array}{rcllcl} 876 &=& 2\cdot 312 &+& 252 \\ 312 &=& 1\cdot 252 &+& 60 \\ 252 &=& 4\cdot 60 &+& 12 \\ 60 &=& 5\cdot 12 &+& 0 \end{array}$$

Damit ist der $ggT(876, 312) = 12$, da dieser als letzter Rest verschieden von 0 auftritt.

b) Wir starten mit der Division von 1820 durch 462 und erhalten:

$$\begin{array}{rcllcl} 1820 &=& 3\cdot 462 &+& 434 \\ 462 &=& 1\cdot 434 &+& 28 \\ 434 &=& 15\cdot 28 &+& 14 \\ 28 &=& 2\cdot 14 &+& 0 \end{array}$$

Damit ist der $ggT(1820, 462) = 14$, da dieser als letzter Rest verschieden von 0 auftritt.

Lösung zu A.3.10

a) Bei dieser Aufgabe wenden wir den euklidischen Algorithmus mit Rückwärtseinsetzen an und starten mit der Division von 17 durch 5:

$$\begin{array}{rclcl} 17 &=& 3\cdot 5 &+& 2 \\ 5 &=& 2\cdot 2 &+& 1 \\ 2 &=& 2\cdot 1 &+& 0 \end{array}$$

Da $ggT(5, 17) = 1$ ist, besitzt das Element 5 ein Inverses in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Dieses erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{rclcl} 1 &=& 5 &-& 2\cdot 2 \\ 1 &=& 5 &-& 2\cdot(17-3\cdot 5) \\ 1 &=& 7\cdot 5 &-& 2\cdot 17 \end{array}$$

Damit ist das inverse Element zu 5 die Restklasse 7. Die Probe (die zur Überprüfung nicht notwendig ist) ergibt

$$[5]\cdot[7] = [5\cdot 7] = [35] = [1],$$

da $35 \equiv 1 \mod 17$ gilt.

b) Erneut wenden wir den euklidischen Algorithmus mit Rückwärtseinsetzen an und starten mit der Division von 21 durch 8:

$$\begin{array}{rclcl} 21 &=& 2\cdot 8 &+& 5 \\ 8 &=& 1\cdot 5 &+& 3 \\ 5 &=& 1\cdot 3 &+& 2 \\ 3 &=& 1\cdot 2 &+& 1 \\ 2 &=& 2\cdot 1 &+& 0 \end{array}$$

Da $ggT(8,21) = 1$ ist, besitzt das Element 8 ein Inverses in $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$. Dieses erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{lllllll} 1 & = & 3 & - & 1\cdot 2 & & \\ 1 & = & 3 & - & 1\cdot(5-1\cdot 3) & = & -1\cdot 5+2\cdot 3 \\ 1 & = & -1\cdot 5 & + & 2\cdot(8-1\cdot 5) & = & 2\cdot 8-3\cdot 5 \\ 1 & = & 2\cdot 8 & - & 3\cdot(21-2\cdot 8) & = & -3\cdot 21+8\cdot 8 \end{array}$$

Damit ist das inverse Element zu 8 die Restklasse 8 selbst. Die Probe ergibt

$$[8]\cdot[8] = [8\cdot 8] = [64] = [1],$$

da $64 \equiv 1 \mod 21$ gilt.

In $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ besitzt jedoch nicht jedes Element ein inverses Element, da 21 keine Primzahl ist. Beispielsweise für 3 existiert kein Element x, sodass $3\cdot x \equiv 1 \mod 21$ gilt.

Lösung zu A.3.11

Bei dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Bedingungen einer Untergruppe erfüllt sind. Das bedeutet, wir zeigen, dass

1. Für alle $g_1 g_2 \in U$ ist $g_1 * g_2 \in U$.
2. Für alle $g \in U$ ist $g^{-1} \in U$.

Setzen wir für 1. zwei beliebige Elemente $g_1, g_2 \in U$ als gegeben voraus. Wir wissen damit, dass

$$\begin{aligned} g_1^3 &= e \quad \text{und} \\ g_2^3 &= e \end{aligned}$$

gelten. Nun ist zu zeigen, dass $g_1 * g_2$ ein Element von U ist, also dass

$$(g_1 * g_2)^3 = e$$

gilt. Dies können wir direkt berechnen, da die betrachtete Gruppe G abelsch, also kommutativ, ist:

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2)^3 &= (g_1 * g_2) * (g_1 * g_2) * (g_1 * g_2) = g_1 * g_2 * g_1 * g_2 * g_1 * g_2 \\ &= g_1 * g_1 * g_1 * g_2 * g_2 * g_2 = g_1^3 * g_2^3 = e * e = e. \end{aligned}$$

Damit ist die Verknüpfung $g_1 * g_2$ in U enthalten.

Es bleibt zu zeigen, dass zudem zu $g \in U$ auch das inverse Element g^{-1} in U liegt. Dazu stellen wir g^{-1} zunächst in g dar, denn es gilt

$$g * g^{-1} = e = g^3,$$

sodass

$$g^{-1} = g^2$$

folgt. Damit gilt nun

$$(g^{-1})^3 = (g^2)^3 = (g * g)^3 = g * g * g * g * g * g = g^3 * g^3 = e * e = e.$$

An dieser Stelle haben wir keine „Potenzgesetze“ benutzt, da wir diese nicht explizit bewiesen haben. Da mit $g \in U$ auch $g^{-1} \in U$ gilt, ist U eine Untergruppe von G.

1.4 zu Vektorräume

Lösung zu A.4.1
Wir berechnen komponentenweise die Addition und Subtraktion:

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 3-1 & 4+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
A-B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-1 & 2+1 \\ 3+1 & 4-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
B+A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+1 & -1+2 \\ -1+3 & 1+4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Und im Anschluss die Matrixmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot(-1)+ & 3\cdot(-1)+4\cdot 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1+1\cdot 3 & (-1)\cdot 2+1\cdot 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Anhand dieser Beispiele erkennen wir, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist.

Lösung zu A.4.2
Um zu zeigen, dass es sich um einen Untervektorraum U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums handelt, zeigen wir für $u, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

- $U \neq \emptyset$
- $u+w \in U$
- $\lambda \cdot u \in U$

Dies führt bei dieser Aufgabe zu:

a)
- Zunächst erkennen wir, dass $\left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ nicht leer ist. Z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.
- Seien $u, v \in U$ zwei beliebige Elemente. Dann existieren $x, y \in \mathbb{R}$, sodass $u = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir

$$
u+w = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1+y+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+1)+1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Somit ist $u+w$ ebenfalls in U, da wir eine reelle Zahl ($z = x+y+1$) finden, sodass $u+w = \begin{pmatrix} z+1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Sei nun $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so existiert ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $u = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x + \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot x + \lambda - 1) + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erneut finden wir ein $z = \lambda \cdot x + \lambda - 1 \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} z+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. Damit ist U ein Unterraum.

b) Aus der Abgeschlossenheit der skalaren Multiplikation folgt, dass $0 \cdot u = 0$, also der Nullvektor, immer in einem Unterraum enthalten sein muss. Für $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ folgt jedoch $0 \notin U$, da die zweite Komponente nicht gleich 1 ist. Daher ist U in diesem Fall kein Unterraum.

c) In dem Fall $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \right\}$ ist die skalare Multiplikation nicht abgeschlossen, da in U lediglich Vektoren mit rationalen Zahlen enthalten sein dürfen, da unser betrachteter Vektorraum aber ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, ist beispielsweise für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda = \sqrt{2}$ der Vektor

$$\lambda \cdot u = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

kein Vektor von U und U somit kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

Lösung zu A.4.3

Mit den gleichen Bedingungen für Unterräume aus der letzten Aufgabe lösen wir ebenfalls diese.

a) Hier schauen wir uns zunächst die Einschränkung genauer an. Da es sich um reelle Zahlen handelt, ist die einzige Lösung von $x^2 + y^2 = 0$ durch $x = y = 0$ gegeben. Andernfalls ist das Quadrat und somit die Summe immer positiv. Wir können somit

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$$

schreiben, sodass gilt:

- U ist nicht leer, denn beispielsweise ist $0 \in U$.
- Seien $u_1, u_2 \in U$ mit $u_1 = (0, 0, z_1)$ und $u_2 = (0, 0, z_2)$ für reelle Zahlen z_1 und z_2. Dann ist

$$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix},$$

sodass $u_1 + u_2$ ebenfalls in U enthalten ist, da die ersten beiden Komponenten 0 sind.

- Sei $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ für ein $z \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix},$$

  sodass $\lambda \cdot u$ in U enthalten ist, da die ersten beiden Komponenten erneut 0 sind.

Somit ist U ein Unterraum.

b) In diesem Fall folgt mit der gleichen Begründung wie im letzten Beispiel, dass $x = y = z = 0$ gelten muss, sodass insgesamt

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{0\}$$

gilt. Der Nullraum ist Unterraum jedes Vektorraums, so also auch in diesem Fall.

c) Betrachten wir nun

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\},$$

so lässt sich die Einschränkung

$$xyz = 0$$

als $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ deuten.

Hier fällt uns auf, dass durch das logische „oder" eine Wahlmöglichkeit existiert. Wählen wir bei einem Vektor eine Komponente gleich 0 und in einem anderen Vektor eine andere, so erhalten wir ein Problem bezüglich der Addition:

Nehmen wir beispielsweise $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, so ist

$$u + w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In der Summe $u + w$ ist keine der Komponenten mehr 0 und somit $u + w \notin U$. Damit ist U kein Untervektorraum.

d) Betrachten wir in dieser Teilaufgabe

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

Es gilt:

- U ist nicht leer, da beispielsweise der Nullvektor die Gleichung erfüllt.

- Seien $u, w \in U$ mit $u = (u_1, u_2, u_3)$ sowie $w = (w_1, w_2, w_3)$, so wissen wir, dass

  $$2 \cdot u_1 + u_2 - u_3 = 0 \quad \text{und } 2 \cdot w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

  gelten. Bilden wir nun die Summe

  $$z = u + w = \begin{pmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_2 \\ u_3 + w_3 \end{pmatrix},$$

  so gilt

  $$\begin{aligned} 2 \cdot z_1 + z_2 - z_3 &= 2 \cdot (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) - (u_3 + w_3) = (2 \cdot u_1 + u_2 - u_3) + (2 \cdot w_1 + w_2 - w_3) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

  Somit ist auch $z = u + w \in U$.

- Für die skalare Multiplikation erhalten wir für $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $u = (u_1, u_2, u_3)$

  $$z = \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \lambda \cdot u_2 \\ \lambda \cdot u_3 \end{pmatrix}.$$

  Setzen wir diesen Vektor in die Vorschrift von U ein, erhalten wir

  $$2 \cdot z_1 + z_2 - z_3 = 2 \cdot \lambda \cdot u_1 + \lambda \cdot u_2 + \lambda \cdot u_3 = \lambda \cdot (2 \cdot u_1 + u_2 - u_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

  Somit ist auch $\lambda \cdot u \in U$.

Insgesamt folgt, dass U ein Untervektorraum ist.

e) Betrachten wir in diesem Fall

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 1\},$$

so erkennen wir direkt, dass der Nullvektor nicht in U enthalten ist, da die Summe 0 ergeben würde. Damit ist U kein Untervektorraum.

Lösung zu A.4.4
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Äquivalenz, sodass wir jede Richtung einzeln zeigen.

Hinrichtung: $\Rightarrow$
Die Hinrichtung zeigen wir in diesem Fall indirekt. Dies schließt einen möglichen direkten Beweis nicht aus, aber die Konstruktion ist auf diese Weise leichter nachvollziehbar.

Wir nehmen also an, dass weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$ gilt. Demnach finden wir Elemente $u_1 \in U_1$ mit $u_1 \notin U_2$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_2 \notin U_1$.

Da $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, sind beide Vektoren auch Elemente von $U_1 \cup U_2$ und wir werden nun zeigen, dass die Summe $u_1 + u_2$ nicht in $U_1 \cup U_2$ enthalten sein kann:

Nehmen wir an, dass $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$ gilt. Dann folgt entweder, dass $u_1 + u_2 \in U_1$ (1. Fall) oder $u_1 + u_2 \in U_2$ (2. Fall).

1. Fall:
Gelte in diesem Fall $u_1 + u_2 \in U_1$. Nun möchten wir ausnutzen, dass per Konstruktion $u_2 \notin U_1$ gilt. Dazu bedienen wir uns der Voraussetzung, dass U_1 ein Unterraum von V ist. Wir wissen daher, dass mit $u_1 \in U_1$ auch $-u_1 \in U_1$ gilt. Somit ist ebenfalls nach den Bedingungen von Untervektorräumen

$$(u_1 + u_2) + (-u_1) \in U_1.$$

Da $(u_1 + u_2) + (-u_1) = u_2$ folgt ein Widerspruch, da wir u_2 so konstruiert haben, dass $u_2 \notin U_1$.

2. Fall:
Der 2. Fall funktioniert analog zum Ersten. Angenommen $u_1 + u_2 \in U_2$, so wissen wir, dass $u_2 \in U_2$ und da U_2 ein Untervektorraum ist, folgt $-u_2 \in U_2$. Damit ist $(u_1 + u_2) + (-u_2) \in U_2$. Dies ist ein Widerspruch, da $(u_1 + u_2) + (-u_2) = u_1$ und nach Konstruktion $u_1 \notin U_2$ gilt.

Da beide Fälle zu einem Widerspruch führen, ist die Summe von u_1 und u_2 nicht in $U_1 \cup U_2$ enthalten und $U_1 \cup U_2$ ist somit kein Untervektorraum.

Rückrichtung: $\Leftarrow$
Ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$, so gilt $U_1 \cup U_2 = U_1$ oder $U_1 \cup U_2 = U_2$. Da U_1 und U_2 Untervektorräume sind, ist $U_1 \cup U_2$ somit auch stets ein Untervektorraum.

Lösung zu A.4.5

a) Im ersten Aufgabenteil sehen wir, dass

$$u + v = w$$

gilt, sodass die Vektoren linear abhängig sind.

b) Bei dieser Aufgabe schreiben wir die Vektoren in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und ziehen als ersten Schritt die erste von der zweiten Zeile sowie das Dreifache der ersten von der dritten Zeile ab. Im Anschluss addieren wir die zweite auf die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Da in der Dreiecksgestalt keine Nullzeile entsteht, sind die Vektoren linear unabhängig.

Lösung zu A.4.6

a) Da der betrachtete Körper $\mathbb{Q}$ ist und somit als Skalare nur rationale Zahlen erlaubt sind, sind die Vektoren u und v linear unabhängig. Sonst würden Variablen $x, y \in \mathbb{Q}$ mit x oder y verschieden von Null existieren, sodass

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Betrachten wir die erste Komponente folgt damit

$$x + y \cdot \sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y \cdot \sqrt{2}.$$

Für $y = 0$ wäre in diesem Fall auch $x = 0$ und dies führt zur linearen Unabhängigkeit. Für $y \neq 0$ können wir durch y dividieren und es entsteht

$$-\frac{x}{y} = \sqrt{2},$$

sodass auf der linken Seite eine rationale Zahl und auf der rechten Seite eine irrationale Zahl steht. Dieser Widerspruch impliziert die lineare Unabhängigkeit.

b) In diesem Fall bilden wir erneut eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wenden den Gauß-Algorithmus an. Zunächst ziehen wir das Zweifache der ersten von der zweiten Zeile sowie Dreifache der ersten von der dritten Zeile ab und ziehen anschließend das Dreifache der zweiten auf die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir beachten, dass es sich bei dem Vektorraum über den $\mathbb{F}_7^3$ über dem Körper $\mathbb{F}_7$ handelt, sodass obige Matrix gleich der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, sodass eine Nullzeile erzeugt wurde. Daher sind die angegebenen Vektoren linear abhängig.

Lösung zu A.4.7

Wir starten mit dem Aufbau der Matrix durch die gegebenen Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Zur Überprüfung auf lineare Unabhängigkeit bilden wir in diesem Fall die Determinante, da Gauß-Umformungen mit einer Variablen, die hier sogar quadratisch auftritt, meist komplizierter sind. Daher berechnen wir mit der Sarrus-Regel:

$$\begin{aligned} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}\right| &= 1\cdot 1\cdot 2\alpha+(1-\alpha)\cdot 1\cdot \alpha^2+\alpha\cdot(1+\alpha)\cdot 1-\alpha^2\cdot 1\cdot\alpha-1\cdot 1\cdot 1-2\alpha\cdot(1+\alpha)\cdot(1-\alpha) \\ &= 2\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha+\alpha^2-\alpha^3-1-2\alpha+2\alpha^3 \\ &= 2\alpha^2+\alpha-1 \end{aligned}$$

Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn obige Determinante verschieden von 0 ist, sodass wir die Nullstellen der Determinante berechnen:

$$\begin{aligned} 2\alpha+\alpha-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \alpha+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,2} &= -\frac{1}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,2} &= -\frac{\alpha}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,2} &= -\frac{\alpha}{4}\pm\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Nullstellen $\alpha_1 = -1$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ und somit sind die Vektoren für $\alpha \notin \{-1\ \frac{1}{2}\}$ linear unabhängig und für $\alpha \in \{-1, \frac{1}{2}\}$ linear abhängig.

Lösung zu A.4.8

Wir starten mit der Summation. Hier müssen Zeilen und Spalten übereinstimmen, sodass wir lediglich $B+C$ berechnen können:

$$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die Multiplikation muss die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen. Daher berechnen wir:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 \\ 14 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 16 \\ 8 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 11 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 15 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Lösung zu A.4.9

a) In der ersten Teilaufgabe schreiben wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

und ziehen das Dreifache der ersten von der zweiten Zeile ab. Damit erhalten wir :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich nun

$$-2 \cdot x_2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1.$$

Setzen wir diese Lösung in die erste Zeile ein, folgt

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1.$$

Insgesamt folgt als Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst schreiben wir das lineare Gleichungssystem in die Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Nun addieren wir die erste auf die zweite Zeile und ziehen das Zweifache der ersten von der letzten Zeile ab. Im Anschluss addieren wir das Dreifache der zweiten auf die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt

$$7 \cdot x_3 = 6 \Leftrightarrow x_3 = \frac{6}{7}.$$

Setzen wir diese Lösung in die zweite Zeile ein, berechnen wir

$$1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{9}{7}.$$

Insgesamt erhalten wir mit der ersten Zeile

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{10}{7}.$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Im dritten Fall betrachten wir das lineare Gleichungssystem :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -2 & 1 & 4 \\ -12 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir das Zweifache der ersten von der zweiten Zeile ab und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -6 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

Da eine Stufe der Länge zwei in der zweiten Zeile entsteht, wählen wir $x_3 = a$ für $a \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir aus der zweiten Zeile

$$2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = -6 \Leftrightarrow x_2 = 2a - 3.$$

Insgesamt ergibt sich somit aus der ersten Zeile

$$(-6) \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \Leftrightarrow (-6) \cdot x_1 = 3a - 2 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

und wir erhalten die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung zu A.4.10
Zum Lösen dieser Aufgabe tauschen wir die dritte und erste Zeile, um nicht alle Zeilen mit a multiplizieren zu müssen. Daher betrachten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab und ziehen das „a"-fache der ersten von der dritten Zeile ab. Da der Skalar 0 als Vielfaches einer Zeile nicht erlaubt ist, müssen wir den Fall $a = 0$ am Ende gesondert betrachten. Nach der ersten Transformation addieren wir die zweite auf die dritte Zeile und erhalten somit:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & 1-a \end{array}\right)$$

Nun betrachten wir die Nullstellen der linken Seite der Matrix, da dies zu verschiedenen Lösungsarten führt:

$$\begin{aligned} & 2-a^2-a &=& 0 \\ \Leftrightarrow\; & a^2+a-2 &=& 0 \\ \Leftrightarrow\; & a_{1,2} &=& -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+2} \\ \Leftrightarrow\; & a_{1,2} &=& -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow\; & a_{1,2} &=& -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

sodass wir $a = -2$ und $a = 1$ erhalten. Insgesamt betrachten wir somit 4 Fälle:

<u>1. Fall $a = 1$:</u>
Setzen wir $a = 1$ in das lineare Gleichungssystem ein, folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dies führt zu einer Stufe der Länge 3, da nur die erste Zeile mit Informationen versehen ist. Wir wählen $x_3 = b$ und $x_2 = c$ für $b, c \in \mathbb{R}$ und berechnen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 - b - c.$$

Wir erhalten in diesem Fall die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } b \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>2. Fall $a = -2$:</u>
Setzen wir $a = -2$ in das lineare Gleichungssystem ein, erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt, dass für $a = -2$ keine Lösung existiert.

<u>3. Fall $a = 0$:</u>
Setzen wir $a = 0$ in die Matrix ein (dies müssen wir **vor** der Multiplikation mit a einsetzen) ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab und anschließend addieren wir die zweite auf die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile ergibt sich

$$2 \cdot x_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir dies in die zweite Zeile ein, ergibt sich

$$-x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Insgesamt folgt mit der ersten Zeile

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

und wir erhalten die Lösung

$$x = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>4. Fall $a \notin \{0, 1, -2\}$:</u>
In diesem Fall betrachten wir die dritte Zeile

$$(2 - a^2 - a) \cdot x_3 = 1 - a$$

und dividieren durch den Vorfaktor $2 - a^2 - a$, sodass wir

$$x_3 = \frac{1 - a}{2 - a^2 - a} = \frac{1}{a + 2}$$

erhalten. Setzen wir dies in die zweite Zeile ein, ergibt sich

$$(a-1)\cdot x_2+(1-a)\cdot x_3 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 \;=\; \frac{1}{2+a}.$$

Insgesamt folgt mit der ersten Zeile

$$x_1+x_2+a\cdot x_3 \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; x_1 \;=\; 1-\frac{1}{2+a}-\frac{a}{2+a} \;\Leftrightarrow\; x_1 \;=\; \frac{1}{2+a}.$$

Damit erhalten wir im vierten Fall die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{a+2}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung zu A.4.11

a) Wir schreiben das lineare Gleichungssystem in folgender Form auf:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & 1-i \end{array} \right)$$

Nun ziehen wir das „i"-fache der ersten von der zweiten Zeile ab und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 1+i \\ 0 & 2 & 2-2i \end{array} \right)$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$2\cdot x_2 \;=\; 2-2i \;\Leftrightarrow\; x_2 \;=\; 1-i.$$

Setzen wir dies in die erste Zeile ein, ergibt sich

$$x_1+i\cdot x_2 \;=\; 1+i \;\Leftrightarrow\; x_1 \;=\; 1+i-i\cdot(1-i) \;\Leftrightarrow\; x_1 \;=\; 0.$$

Wir erhalten als Lösung

$$x \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

b) Bei dieser Teilaufgabe betrachten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Ziehen wir hier die erste von der zweiten Zeile ab und addieren die erste auf die dritte Zeile, sowie im Anschluss die zweite Zeile vom Zweifachen der dritten Zeile abziehen, erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

Da es sich bei dem betrachteten Körper um den $\mathbb{F}_7$ handelt, ist dieses Gleichungssystem äquivalent zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit folgt, dass eine Stufe der Länge 2 unter der zweiten Zeile existiert, sodass wir $x_3 = a$ mit $a \in \mathbb{F}_7$ wählen. Damit berechnen wir aus der zweiten Zeile

$$2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3a = 4a.$$

Dies eingesetzt in die erste Zeile ergibt

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 4a - 2a = 1 - 6a = 1 + a.$$

Damit erhalten wir die (endliche) Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F_7^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{F}_7 \right\}.$$

Lösung zu A.4.12

a) Wir berechnen die inverse Matrix, indem wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir ziehen zunächst das Zweifache der ersten von der zweiten und dritten Zeile sowie anschließend das Siebenfache der dritten von der zweiten Zeile ab und addieren die dritte auf die erste Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit lesen wir die inverse Matrix direkt auf der rechten Seite ab:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Für eine 2×2 Matrix wenden wir die Regel per Determinante an und erhalten die inverse Matrix durch:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 7 - 3 \cdot 4} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) In diesem Fall liegt die Matrix bereits in unterer Dreiecksgestalt vor, sodass wir sie mittels Gauß-Algorithmus in eine Diagonalmatrix überführen. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir das Zweifache der vierten von der dritten, das Dreifache der vierten von der zweiten und das Vierfache der vierten von der ersten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Im Anschluss ziehen wir das Zweifache der dritten von der zweiten sowie das Dreifache der dritten von der ersten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Als letztes ziehen wir das Zweifache der zweiten von der ersten Zeile ab und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir lesen die Inverse auf der rechten Seite ab:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu A.4.13

Aus den Berechnungen der Aufgabe A.4.10 wissen wir, dass wir nur für $a = 1$ und $a = -2$ keine eindeutige Lösung erhalten, sodass die Matrix für $a \in \mathbb{R}\setminus\{1, -2\}$ invertierbar ist.

Lösung zu A.4.14

Zur Lösung betrachten wir das lineare Gleichungssystem und nutzen in dieser Aufgabe beispielhaft die Reduzierung modulo 5, statt der Multiplikation mit negativen Zahlen. Beide Varianten sind in $\mathbb{F}_p$ valide Lösungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun addieren wir das Zweifache der ersten auf die zweite und dritte Zeile und reduzieren die Einträge modulo 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Im Anschluss addieren wir die zweite auf die dritte Zeile und reduzieren erneut modulo 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Im nächsten Schritt addieren wir die dritte auf die zweite und erste Zeile und reduzieren modulo 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nun addieren wir das Vierfache der zweiten auf die dritte Zeile und reduzieren die Einheitsmatrix modulo 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Als Letztes multiplizieren wir die dritte Zeile mit 4, die zweite mit 2 und die erste mit 3, um die Einheitsmatrix zu erhalten und reduzieren ein letztes Mal modulo 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 12 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 4 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Damit ist die inverse Matrix durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Reduzierung nach jedem Schritt kann theoretisch nur einmalig am Ende durchgeführt oder sogar ganz weggelassen werden. Oft werden die Rechnungen jedoch einfacher, wenn wir größere Zahlen direkt mittels Modulorechnung reduzieren. Eine Angabe der inversen Matrix mit Elementen eines per Konvention festgehaltenen Repräsentantensystems (hier 0 bis 4) ist üblich.

Lösung zu A.4.15
Dass es sich bei den drei Vektoren nicht um ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ handelt, können wir schnell erkennen, denn es gilt beispielsweise

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot v_3.$$

Wir wählen die beiden linear unabhängigen Vektoren v_1 und v_3 aus und ergänzen diese zu einer Basis, dazu betrachten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ziehen wir das Zweifache der ersten von der zweiten Zeile ab erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

und erkennen eine Stufe der Länge zwei in der zweiten und dritten Spalte. Daher ist sowohl e_2 als auch e_3 eine mögliche Wahl zur Ergänzung zu einem Erzeugendensystem. Wir entscheiden uns für e_3, sodass wir das Erzeugendensystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

angeben.

Lösung zu A.4.16
Da jedes Erzeugendensystem von drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ automatisch eine Basis sein muss, da $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, wählen wir v_1, v_2 und v_3 aus. Für den Basistausch schreiben wir die Vektoren in Spalten in eine Matrix und setzen u_1 auf die rechte Seite, wir betrachten somit:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir das Zweifache der ersten von der zweiten Zeile und das Dreifache der ersten von der dritten ab. Anschließend addieren wir die zweite auf die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Der Einfachheit halber, dividieren wir die letzte Zeile durch -2 und addieren sie anschließend auf die zweite Zeile und ziehen sie von der ersten ab:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Da in der ersten und letzten Zeile keine 0 auf der rechten Seite steht, können wir u_1 entweder mit v_1 oder mit v_3 tauschen. Damit ergibt sich beispielhaft eine neue Basis

$$\{v_1, v_2, u_2\}.$$

Lösung zu A.4.17

Eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ haben wir bereits mit $\{1, i\}$ kennengelernt. Nun kombinieren wir diese für jede der beiden Komponenten zu folgender Basis:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

Da wir insgesamt 4 Basisvektoren benötigen, besitzt der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$ die Dimension 4.

Betrachten wir nun $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{Q}$:
Da bereits $\mathbb{R}$ überabzählbar und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist, vermuten wir, dass die Dimension von $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{Q}$ unendlich ist. Dabei möchten wir nicht beweisen, ob sie überabzählbar unendlich oder abzählbar unendlich ist. Für den Beweis betrachten wir zunächst $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$:

Angenommen, der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ sei endlich dimensional. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass wir n verschiedene Basiselemente aus $\mathbb{R}$ finden. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Damit würde folgen, dass wir jede reelle Zahl durch eine Linearkombination mit Skalaren $q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q}$ darstellen können. Sei also $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i.$$

Anders ausgedrückt: Es existiert eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \times \{x_1, ..., x_n\} \to \mathbb{R}.$$

Diese Aussage ist jedoch falsch, da die Mächtigkeit von $\mathbb{Q} \times \{x_1, ..., x_n\}$ abzählbar unendlich ist. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\{x_1, ..., x_n\}$ endlich ist, zählen wir für jedes x_i mit $i \in \{1, ..., n\}$ einmal die rationalen Zahlen ab und erhalten wieder eine abzählbar unendliche Menge. Mit der Surjektivität wäre damit die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ kleiner oder gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$.

Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, folgt damit, dass die Dimension von $\mathbb{C}$ und letztlich die Dimension von $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{Q}$ unendlich ist.

Lösung zu A.4.18

a) Wir berechnen die Determinante direkt über die bekannte Formel:

$$\det(A) = 1\cdot(-2)-(-1)\cdot 2 = 0.$$

Damit besitzt die Matrix nicht vollen Rang. Da es sich bei A nicht um die Nullmatrix handelt, muss $rg(A) = 1$ gelten.

b) Nach der Regeln von Sarrus folgt

$$\begin{aligned}\det(B) &= 1\cdot(-2)\cdot 4+2\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 3-1\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1-4\cdot 1\cdot 2\\ &= -8+2+3+2-3-8\\ &= -12.\end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich 0 ist, besitzt die Matrix B vollen Rang, also gilt $rg(B) = 3$.

c) Wir berechnen erneut nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}\det(C) &= 0\cdot 1\cdot 2+1\cdot 0\cdot 2+3\cdot 3\cdot 2-2\cdot 1\cdot 3-2\cdot 0\cdot 0-2\cdot 3\cdot 1\\ &= 0+0+18-6-0-6\\ &= 6.\end{aligned}$$

Auch hier ist die Determinante ungleich 0 und somit besitzt C vollen Rang, also gilt $rg(C) = 3$.

d) Bei dieser Aufgabe berechnen wir die Determinante mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. Dabei entscheiden wir uns für die Entwicklung nach der ersten Spalte, da dort die meisten Nullen und die größte Zahl auftritt. Als Erstes versehen wir die Matrix mit den nötigen Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ & 4^- \\ 0^- & 1^+ & 2^- & 1^+ \\ -8^+ & 1^- & -2^+ & 3^- \\ 0^- & 1^+ & 0^- & 4^+ \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\det(D) = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 8\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Determinaten der auftretenden Matrizen mit der Regel von Sarus:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} &= 1\cdot(-2)\cdot 4+2\cdot 3\cdot 1+1\cdot 1\cdot 0-1\cdot(-2)\cdot 1-0\cdot 3\cdot 1-4\cdot 1\cdot 2\\ &= -8+6+0+2-0-8\\ &= -8\\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} &= 2\cdot 2\cdot 4+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 1\cdot 0-1\cdot 2\cdot 4-0\cdot 1\cdot 2-4\cdot 1\cdot 3\\ &= -16+3+0-8-0-12\\ &= -1\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\det(D) = 1\cdot(-8) - 8\cdot(-1) = 0.$$

Damit besitzt die Matrix D keinen vollen Rang. Zur Bestimmung des genauen Rangs wenden wir den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -8 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nun addieren wir das Achtfache der ersten auf die dritte Zeile und anschließend ziehen wir das 17-fache der zweiten von der dritten Zeile sowie die zweite von der vierten Zeile ab:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 22 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Als Letztes ziehen wir die dritte Zeile vom Sechsfachen der vierten Zeile ab und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir in der unteren Dreiecksgestalt eine Nullzeile, sodass $rg(D) = 4 - 1 = 3$ gilt.

Lösung zu A.4.19
Zunächst berechnen wir die Determinante wie üblich mit der Regeln von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) + a\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot a - 1\cdot 1\cdot a - 1\cdot 1\cdot 1 \\ &= 0 - 1 + a - 0 - a - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Die Determinante ist somit unabhängig vom Parameter a und für alle $a \in \mathbb{F}_7$ verschieden von 0.

Ist die Determinante verschieden von 0, besitzt die Matrix immer vollen Rang, dies bedeutet, es ist $rg(A) = \min(m, n)$ wobei m und n für die Zeilen- beziehungsweise Spaltenanzahl der Matrix steht.

Ist die Determinante einer Matrix gleich 0, so besitzt sie keinen vollen Rang. Damit ist $rg(A) < \min(m, n)$. Wir können aus der Determinante im Allgemeinen jedoch keine Aussage über die genaue Höhe des Rangs treffen.

Lösung zu A.4.20
Bilden wir aus den Vektoren die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so besitzt diese nach Sarrus die Determinante

$$1\cdot 1\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0+1\cdot 1\cdot 1-0\cdot 1\cdot 1-1\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot 0 \;=\; 2$$

und somit besitzt die Matrix vollen Rang. Dies ist äquivalent zu linear unabhängigen Spalten, sodass wir drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gegeben haben.

Für die Orthonormalbasis wenden wir das Verfahren nach Gram-Schmidt mit euklidischer Norm und euklidischem Skalarprodukt an:

a) Zunächst wählen wir

$$u_1 \;=\; \frac{v_1}{||v_1||} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Als zweiten Vektor berechnen wir

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_2 &= v_2 - < u_1, v_2 > \cdot u_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 + 0\cdot 1\right)\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Im Anschluss normieren wir diesen Vektor. Es ist

$$||\tilde{u}_2|| \;=\; \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \;=\; \sqrt{\frac{3}{2}}$$

und damit erhalten wir

$$u_2 \;=\; \frac{\tilde{u}_2}{||\tilde{u}_2||} \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Im nächsten Schritt berechnen wir den dritten Vektor

$$\tilde{u}_3 = v_3 - < u_2, v_3 > \cdot u_2 - < u_1, v_3 > \cdot u_1 .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} < u_2, v_3 > \cdot u_2 &= < \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} < u_1, v_3 > \cdot u_1 &= < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Mit diesen Zwischenergebnissen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Abschließend normieren wir diesen Vektor durch

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{\tilde{u}_3}{||\tilde{u}_3||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Orthonormalbasis

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Lösung zu A.4.21
Zunächst zeigen wir, dass es sich bei U_1 und U_2 um Untervektorräume handelt:

- Sowohl U_1 als auch U_2 sind nicht leer, denn beide enthalten die Nullfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. Denn in diesem Fall ist sowohl
$$f(x) = 0 = f(-x)$$
als auch
$$f(x9 = 0 = -0 = -f(x).$$
- Nehmen wir zwei Elemente $f_1, f_2 \in U_1$ her. Dann können wir direkt
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x) = (f_1 + f_2)(-x)$$
berechnen, sodass $f_1 + f_2 \in U_1$ ist.

  Nehmen wir zwei Elemente $h_1, h_2 \in U_2$, so berechnen wir analog
$$(h_1 + h_2)(-x) = h_1(x) + h_2(-x) = (-h_1(x)) + (-h_2(x)) = -(h_1 + h_2)(x),$$
sodass $h_1 + h_2 \in U_2$ gilt.
- Betrachten wir im Folgenden $f \in U_1$, $h \in U_2$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist
$$\begin{aligned}(\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x) &&= \lambda \cdot f(-x) &&= (\lambda \cdot f)(-x) \quad \text{sowie}\\ (\lambda \cdot h)(-x) &= \lambda \cdot h(-x) &&= \lambda \cdot (-h(x)) &&= -(\lambda \cdot f)(x),\end{aligned}$$
sodass sowohl $\lambda \cdot f \in U_1$ als auch $\lambda \cdot h \in U_2$ gilt.

Mit obigen Rechnungen folgt, dass U_1 und U_2 Untervektorräume sind.

Für die direkte Summe reicht es zu zeigen, dass wir jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch eine Summe von zwei Funktionen $f_1 \in U_1$ und $f_2 \in U_2$ darstellen können. Dies erhalten wir mit folgender Rechnung:
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x))$$
Nun ist für $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x))$
$$h(-x) = \frac{1}{2} \cdot (f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)) = h(x),$$
sodass $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)) \in U_1$.

Für $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x))$ gilt
$$g(-x) = \frac{1}{2} \cdot (f(-x) - f(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x)) = -g(x),$$
sodass $g(x) \in U_2$ gilt.

Insgesamt haben wir somit zwei Funktionen $h \in U_1$ und $g \in U_2$ gefunden, sodass $f = h + g$ für alle $f \in V$ gilt, damit gilt
$$U_1 \oplus U_2 = V.$$

Lösung zu A.4.22
Zunächst zeigen wir, dass es sich bei obiger Konstruktion von $< x, y >$ um ein Skalarprodukt handelt. Dazu zeigen wir die Bedingungen (S1) bis (S4) aus der Definition des Skalarprodukts:

- (S1) Bilinearität 1:

  Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} < \lambda \cdot x + y, z > &= (\lambda \cdot x + y)^T \cdot A \cdot z = ((\lambda \cdot x)^T + y^T) \cdot A \cdot z = (\lambda \cdot x^T \cdot A \cdot z) + (y^T \cdot A \cdot z) \\ &= \lambda \cdot < x, z > + < y, z > . \end{aligned}$$

- (S2) Bilinearität 2:

  Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und $\mu \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} < x, \mu \cdot y + z > &= x^T \cdot A \cdot (\mu \cdot y + z) = x^T \cdot A \cdot \mu \cdot y + x^T \cdot A \cdot z = (\mu \cdot x^T \cdot A \cdot y) + (x^T \cdot A \cdot z) \\ &= \mu \cdot < x, y > + < x, z > . \end{aligned}$$

- (S3) Symmetrie:

  Für die Symmetrie berechnen wir für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} < x, y > &= x^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

  sowie

$$\begin{aligned} < y, x > &= y^T \cdot A \cdot x = y^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2. \end{aligned}$$

  Da die beiden Ergebnisse übereinstimmen, ist die Symmetrie erfüllt.

- (S4) Nicht-Negativität und Definitheit:
  Aus der Rechnung unter (S3) entnehmen wir für $x, y \in \mathbb{R}^2$, dass

$$< x, y > = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

  gilt. Setzen wir statt x und y nun x und x ein, folgt somit

$$< x, x > = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2.$$

  Da auf der rechten Seite nur Quadrate auftreten, ist dieser Wert für jedes $x \neq 0$ immer positiv und nur 0, wenn wir den Nullvektor einsetzen, sodass ebenfalls (S4) erfüllt ist.

Damit handelt es sich bei $<.,.>$ um ein Skalarprodukt und wir berechnen

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 = -4.$$

Dieser Wert ist zwar negativ, aber wir müssen beachten, dass die Nicht-Negativität für $< x, x >$ und nicht allgemein für $< x, y >$ gilt.

Die Wahl der Matrix A ist bei dieser Konstruktion wichtig. Beispielsweise für die Nullmatrix wäre das Skalarprodukt für jegliche Kombination von Vektoren immer 0 und somit kein Skalarprodukt.

1.5 zu Lineare Abbildungen

Lösung zu A.5.1
Damit es sich bei einer Funktion f um eine lineare Abbildung handelt, müssen die folgenden beiden Voraussetzungen für $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erfüllt sein:

- $f(u+v) = f(u)+f(v)$
- $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$

Damit gilt:

a) Wähle beispielhaft $x = y = 1 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{array}{lllllll} f(1+1) & = & f(2) & = & 2\cdot 2-1 & = & 3 \quad \text{und} \\ f(1)+f(1) & = & (2\cdot 1-1)+(2\cdot 1-1) & = & 1+1 & = & 2, \end{array}$$

sodass f keine lineare Abbildung ist.

b) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$g(x+y) = g((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2) = (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = g(x)+g(y).$$

Sei zusätzlich $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt

$$g(\lambda \cdot x) = g((\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)) = (\lambda \cdot x_1)+(\lambda \cdot x_2) = \lambda \cdot (x_1+x_2) = \lambda \cdot g(x).$$

Damit handelt es sich bei g um eine lineare Abbildung.

c) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$h(x+y) = h((x_1+y_1, x_2+y_2)) = \begin{pmatrix} x_1+y_1-x_2-y_2 \\ 2\cdot(x_1+y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ 2\cdot x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1-y_2 \\ 2\cdot y_1 \end{pmatrix} = h(x)+h(y).$$

Sei zusätzlich $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$h(\lambda \cdot x) = h((\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 - \lambda x_2 \\ 2\cdot \lambda \cdot x_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot h(x).$$

Damit handelt es sich bei h um eine lineare Abbildung.

d) Betrachten wir die beiden Vektoren $x = (1,0,0)^T$ sowie $y = (0,1,0)^T$, so gilt auf der einen Seite

$$k(x)+k(y) = \max(1,0,0)+\max(0,1,0) = 1+1 = 2,$$

jedoch auf der anderen Seite

$$k(x+y) = \max(1,1,0) = 1.$$

Somit ist k keine lineare Abbildung.

Lösung zu A.5.2

a) Für den Kern berechnen wir

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sodass aus der ersten Zeile $x = -y$ und aus der zweiten Zeile $x = y$ folgt. Fassen wir diese Bedingungen zusammen, muss $x = y = 0$ folgen, somit ist

$$ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$dim(V) = dim(ker(f)) + dim(im(f)) \Leftrightarrow 2 = 0 + dim(im(f)) \Leftrightarrow dim(im(f)) = 2.$$

Da $dim(V) = dim(im(f))$ ist $im(f) = \mathbb{R}^2$.

Aus $ker(f) = \{0\}$ folgt, dass f injektiv ist. $dim(V) = dim(im(f))$ impliziert die Surjektivität von f, sodass f insgesamt bijektiv ist.

b) Für den Kern berechnen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zunächst addieren wir das Zweifache der ersten auf die zweite und dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Es liegt somit eine Stufe der Länge 2 bei den Variablen x_2 und x_3 vor, sodass wir $x = a$ für $a \in \mathbb{R}$ wählen.

Aus der letzten Zeile folgt $x_4 = 0$, sodass wir aus der zweiten Zeile

$$x_2 + 16 \cdot x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -16a$$

und aus der ersten Zeile

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4a$$

erhalten. Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

beziehungsweise wir erhalten den Kern

$$ker(f) = < \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Theoretisch setzen wir das Bild nach und nach in die lineare Abbildung ein. Um unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, entscheiden wir uns für die Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Durch die spezielle Konstruktion der linearen Abbildung $f(x) = A \cdot x$ und einer Matrix A ergibt dies die entsprechenden Spalten der Matrix, sodass

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen vier Vektoren wählen wir nun die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren aus. In unserem Fall können wir jedoch erneut mit der Dimensionsformel argumentieren, dass

$$4 = dim(\mathbb{R}^4) = dim(ker(f)) + dim(im(f)) = 1 + dim(im(f)),$$

sodass $dim(im(f)) = 3$ gilt. Da der Zielraum $\mathbb{R}^3$ ebenfalls Dimension 3 besitzt, ist $im(f) = \mathbb{R}^3$.

Da der Kern der Abbildung mehr als nur den Nullvektor enthält, ist die lineare Abbildung nicht injektiv. Da das Bild mit dem Zielraum übereinstimmt, ist sie surjektiv und damit insgesamt nicht bijektiv.

c) Für den Kern betrachten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sodass $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ und $x_3 = x_1$ folgt, also insgesamt

$$ker(f) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

In diesem Beispiel können wir nicht direkt mit der Dimensionsformel argumentieren und setzen eine Basis. Wir wählen wieder die Standardbasis und setzen in die lineare Abbildung ein:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun erkennen wir, dass

$$f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f(e_3),$$

sodass diese drei Vektoren linear abhängig sind. Da $f(e_1)$ und $f(e_2)$ offensichtlich linear unabhängig sind, wählen wir diese für eine Basis des Bilds und erhalten

$$im(f) \;=\; < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Da der Kern nicht nur aus dem Nullvektor besteht, ist die Abbildung nicht injektiv und da die Dimension des Bilds kleiner als die des Zielraums ist, ist sie auch nicht surjektiv und insgesamt nicht bijektiv.

d) Für den Kern betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Zunächst addieren wir die erste auf die zweite Zeile und im Anschluss ziehen wir das Dreifache der weiten vom Doppelten der dritten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten eine eindeutige Lösung $x_2 = x_1 = 0$, sodass

$$ker(f) \;=\; \{0\}.$$

Für das Bild setzen wir erneut die Standardbasis ein und erhalten:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, gilt

$$im(f) \;=\; < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} > .$$

Damit ist wie im letzten Beispiel f weder injektiv noch surjektiv und somit nicht bijektiv.

Lösung zu A.5.3

a) Wir starten mit den Bildern der Standardbasis

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und fassen diese als Spalten einer Matrix auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obige Matrix ist die Abbildungsmatrix von f.

b) Erneut setzen wir die Einheitsvektoren in die lineare Abbildung ein und erhalten:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_e) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilden wir mit diesen Vektoren die Spalten einer Matrix erhalten wir die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu A.5.4

a) Um die Transformationsmatrix zu erhalten, stellen wir die Basisvektoren aus **v** in den Basisvektoren aus **w** dar. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem mit den Basisvektoren aus **w** auf der linken Seite und den Basisvektoren aus **v** auf der rechten Seite:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir die erste vom Zweifachen der zweiten Zeile ab und addieren im Anschluss das Dreifache der zweiten Zeile auf die erste Zeile:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Dividieren wir als letzten Schritt die erste Zeile durch 2 und die zweite Zeile durch (-1), erhalten wir auf der rechten Seite die Transformationsmatrix

$$T^{\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Wir betrachten erneut das Gleichungssystem mit den Basisvektoren aus **w** auf der linken Seite und den Basisvektoren aus **v** auf der rechten Seite:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zunächst ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab und addieren anschließend die zweite auf die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Als Nächstes ziehen wir die dritte Zeile vom Zweifachen der zweiten Zeile ab und addieren nachfolgend die zweite auf das Zweifache der ersten Zeile:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Dividieren wir die erste Zeile durch 2, die zweite Zeile durch (-2) sowie die dritte Zeile durch 2, erhalten wir die Basiswechselmatrix

$$T_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu A.5.5

a) Zunächst bilden wir die Basisvektoren von $\mathbf{v}$ mit der linearen Abbildung f ab, und stellen das Ergebnis in der Basis $\mathbf{w}$ durch ein geeignetes lineare Gleichungssystem dar:

Es ist

$$f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren möchten wir nun in der Zielbasis $\mathbf{w}$ darstellen. Statt eines linearen Gleichungssystems sehen wir die Darstellung in diesem Beispiel schnell:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sodass wir die Darstellungsmatrix direkt durch obige Faktoren angeben können:

$$M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst entschlüsseln wir die mathematische Schreibweise der Bilder der Standardbasis.

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Anschluss berechnen wir die Bilder der Basis $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ unter der f und nutzen explizit die Eigenschaft der Linearität aus:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= f(e_1)+f(e_2)-f(e_3) &&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\\
f(v_2) &= -f(e_1)+f(e_2) &&= -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\\
f(v_3) &= 2\cdot f(e_1)-f(e_2)+f(e_3)+f(e_4) &&= \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\\
f(v_4) &= -f(e_3)-f(e_4) &&= -\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Im nächsten Schritt stellen wir die Bilder der Basisveketoren aus **v** mit den Basisvektoren auf **w** dar und betrachten daher folgendes lineare Gleichungssystem (Basisvektoren aus **w** auf die linke, Bilder von **v** auf die rechte Seite):

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\
1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Zunächst ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\
0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

und addieren die zweite auf die dritte Zeile:

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\
0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1\\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -2 & 2
\end{array}\right)
$$

Als Nächstes ziehen wir die dritte Zeile vom Zweifachen der zweiten Zeile ab

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\
0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -2 & 2
\end{array}\right)
$$

und anschließend addieren wir die zweite auf das Zweifache der ersten Zeile:

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 & -2\\
0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -2 & 2
\end{array}\right)
$$

Dividieren wir durch die Diagonalelemente auf der linken Seite erhalten wir die Darstellungsmatrix:

$$M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Wir beginnen mit der Abbildung der Basisvektoren aus **v** mit f:

$$f(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Im Anschluss stellen wir obige Bildvektoren durch die Basis $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ dar, indem wir folgendes lineare Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Nun ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab und addieren im Anschluss die zweite auf das Zweifache der ersten Zeile:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

Dividieren wir beide Zeilen durch 2, erhalten wir die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathbf{w}}^{\mathbf{v}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.6 zu Normalformen

Lösung zu A.6.1

a) Wir starten mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms:

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 5\cdot(-1) = (-3) - 2\cdot\lambda + \lambda^2 + 5 \\
&= \lambda^2 - 2\cdot\lambda + 2
\end{aligned}
$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
& & \chi_A(\lambda) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \lambda^2 - 2\cdot\lambda + 2 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} \\
&\Leftrightarrow & \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

Da $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{R}$ nicht existiert, zerfällt das charakteristische Polynom nicht in Linearfaktoren und A ist damit nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

b) Erneut starten wir mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms, in diesem Fall mit der Regel von Sarrus:

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & i \\ 1 & i-\lambda & 1 \\ i & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)\cdot(i-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 1\cdot 1\cdot i + i\cdot 1\cdot 1 - i\cdot(i-\lambda)\cdot i - 1\cdot 1\cdot(1-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 1\cdot 1 \\
&= (1 - 2\cdot\lambda + \lambda^2)\cdot(i-\lambda) + i + i + (i-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= i - 2i\cdot\lambda + i\cdot\lambda^2 - \lambda + 2\cdot\lambda^2 - \lambda^3 + 3i + \lambda - 2 \\
&= -\lambda^3 + (2+i)\cdot\lambda^2 - 2i\cdot\lambda - 2 + 4i
\end{aligned}
$$

In einer Klausur sollte an dieser Stelle mindestens eine Nullstelle für eine Polynomdivision gegeben sein. Mit genug Zeit findet man durch Ausprobieren die Nullstelle

$$\lambda_1 = 1 - i$$

und mit der Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrl}
 & (-\lambda^3 + & (2+i)\cdot\lambda^2 - & 2i\cdot\lambda - 2 + 4i) : (\lambda - (1-i)) = -\lambda^2 + (1+2i)\cdot\lambda + (3-i) \\
- & (\lambda^3 + & (1-i)\cdot\lambda^2\,) & \\
\hline
 & & (1+2i)\cdot\lambda^2 - & 2i\cdot\lambda \\
 & -(- & (1+2i)\cdot\lambda^2 - & (3+i)\cdot\lambda\,) \\
\hline
 & & & (3-i)\cdot\lambda - 2 + 4i \\
 & & - & ((3-i)\cdot\lambda - 2 + 4i) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

Nun erhalten wir die weiteren Nullstellen mittels $p-q-$Formel:

$$\begin{array}{rrcl} & -\lambda^2+(1+2i)\cdot\lambda+(3-i) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2-(1+2i)\cdot\lambda-(3-i) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2+(3-i)} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\sqrt{\frac{(1+2i)^2}{4}+(3-i)} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left((1+2i)^2+4\cdot(3-i)\right)} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1+2i)^2+12-4i} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4i+4i^2+12-4i} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4i-4+12-4i} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{2,3} & = & \frac{1+2i}{2}\pm\frac{3}{2} \end{array}$$

Dies führt zu den beiden weiteren Nullstellen

$$\lambda_2 = \frac{1+2i}{2}+\frac{3}{2} = 2+i$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1+2i}{2}-\frac{3}{2} = -1+i.$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren:

Für $\lambda = 1-i$ betrachten wir $ker(A-(1-i)\cdot I_3)$ und somit das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & i & 0 \\ 1 & -1+2i & 1 & 0 \\ i & 1 & i & 0 \end{array}\right)$$

Nun addieren wir das i-fache der ersten auf die zweite Zeile und ziehen die erste von der dritten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 1 & i & 0 \\ 0 & -1+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der zweiten Zeile folgt direkt, dass $x_2 = 0$ gelten muss. Damit wählen wir $x_3 = a$ für $a \in \mathbb{C}$ und erhalten mit der ersten Zeile

$$i\cdot x_1+x_2+i\cdot x_3 = \Leftrightarrow \ x_1 = -a.$$

So können wir den Eigenraum kompakt durch

$$Eig(1+i) = <\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}> = <\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}>$$

beschreiben.

Betrachten wir im Folgenden $\lambda = 2+i$, so erhalten wir durch $ker(A-(2+i)\cdot I_3)$ das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-i & 1 & i & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ i & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right)$$

Zunächst tauschen wir die erste und zweite Zeile, um die benötigten Rechnungen zu vereinfachen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1-i & 1 & i & 0 \\ i & 1 & -1-i & 0 \end{array}\right)$$

Im Anschluss addieren wir das $(1+i)$-fache der ersten auf die zweite Zeile und ziehen das i-fache er der ersten von der dritten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1-2i & 1+2i & 0 \\ 0 & 1+2i & -1-2i & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir nun die zweite auf die dritte Zeile erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1-2i & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgrund der Stufe der Länge 2 wählen wir $x_3 = a$ für $a \in \mathbb{C}$. Dies ergibt mit der zweiten Zeile

$$(-1-2i)\cdot x_2 + (1+2i)\cdot x_3 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 \;=\; a.$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 \;=\; a.$$

Insgesamt erhalten wir den Eigenraum

$$Eig(2+i) \;= < \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Zuletzt betrachten wir $\lambda = -1+i$ und erhalten das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-i & 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ i & 1 & 2-i & 0 \end{array}\right)$$

Erneut tauschen wir die zweite und erste Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2-i & 1 & i & 0 \\ i & 1 & 2-i & 0 \end{array}\right)$$

Anschließend ziehen wir das $(2-i)$-fache der ersten von der zweiten Zeile sowie das i-fache der ersten von der dritten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & -2+2i & 0 \\ 0 & 1-i & 2-2i & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir im Folgenden die zweite auf die dritte Zeile, ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & -2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da erneut eine Stufe der Länge 2 entsteht, wählen wir $x_3 = a$ für $a \in \mathbb{C}$ und berechnen mit der zweiten Zeile

$$(-1+i)\cdot x_2 + (-2+2i)\cdot x_3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_2 = \frac{2-2i}{-1+i}\cdot a.$$

Dabei ist

$$\frac{2-2i}{-1+i} = \frac{(2-2i)\cdot(-1-i)}{(-1+i)\cdot(-1-i)} = \frac{(-2+2i^2)+(2-2)\cdot i}{(-1)^2-i^2} = \frac{-4}{2} = -2,$$

sodass wir insgesamt

$$x_2 = -2a$$

erhalten. Damit folgt aus der ersten Zeile

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = a$$

und wir erhalten den Eigenraum

$$Eig(-1+i) = <\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix}> = <\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}>.$$

Letztlich können wir mit den Eigenvektoren die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden, sodass

$$D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} = S\cdot A\cdot S^{-1}$$

gilt.

c) Wir starten mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms mit dem Entwicklungssatz von Laplace, da die Matrix viele Nullen enthält. Dabei entwickeln wir nach der dritten Zeile und es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)\cdot((-\lambda)\cdot(2-\lambda)+1) \\
&= (-1-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\cdot\lambda+1) \\
&= -\lambda^2+2\cdot\lambda-1-\lambda^3+2\cdot\lambda^2-\lambda \\
&= -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1
\end{aligned}
$$

In diesem Fall erkennen wir schnell, dass $\lambda = 1$ eine Lösung ist und erhalten mit Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & (-\lambda^3+ & \lambda^2+ & \lambda - 1) & : (\lambda-1) = -\lambda^2+1 \\
- & (-\lambda^3+ & \lambda^2) & & \\
\hline
 & & & \lambda-1 & \\
 & & & (\lambda-1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Die verbleibenden Nullstellen sind somit $\lambda = 1$, also mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Insgesamt zerfällt das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, sodass wir im nächsten Schritt die Eigenvektoren berechnen:

Wir starten mit dem Eigenwert $\lambda = 1$, um frühzeitig zu erkennen, falls die Matrix nicht diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir $ker(A - 1\cdot I_3$ und betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)
$$

Ziehen wir nun die erste von der zweiten Zeile ab, erhalten wir

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)
$$

und können aufgrund einer Stufe der Länge 2 für $a \in \mathbb{R}$ den Wert $x_2 = a$ annehmen. Aus der dritten Zeile folgt $x_3 = 0$ und insgesamt damit aus der ersten

$$-x_1+x_2-2\cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = a.$$

Damit erhalten wir die Lösungsmenge und somit den Eigenraum zum Eigenwert λ

$$Eig(\lambda) = <\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}> = <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>.$$

Wir sehen also, dass die Dimension des Eigenraums und damit die geometrische Vielfachheit 1 beträgt, während die algebraische Vielfachheit zum Eigenwert 1 2 beträgt. Damit ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

d) Wir starten mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)-(-1)\cdot 1\\ &= 6-5\cdot\lambda+\lambda^2+1\\ &= \lambda^2-5\cdot\lambda+7\end{aligned}$$

Wir erhalten die Eigenwerte durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} & \chi_A(\lambda) &= 0\\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2-5\cdot\lambda+7 &= 0\\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} &= \tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2-7}\\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} &= \tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-7}\\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} &= \tfrac{5}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}\end{aligned}$$

Da die Wurzel in $\mathbb{R}$ nicht existiert, zerfällt das Polynom über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren und A ist somit nicht diagonalisierbar.

e) Wir erhalten das gleiche charakteristische Polynom wie im letzten Beispiel und erhalten die Nullstellen:

$$\begin{aligned} & \lambda_{1,2} &= \tfrac{5}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}\\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1,2} &= \tfrac{5}{2}\pm\tfrac{\sqrt{3}\cdot i}{2}.\end{aligned}$$

Da wir eine 2x2-Matrix und zwei verschiedene Eigenwerte vorliegen haben, ist A diagonalisierbar.

Im nächsten Schritt berechnen wir die Eigenvektoren:
Sei $\lambda = \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$, so betrachten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0\end{array}\right)$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, tauschen wir zunächst die erste mit der zweiten Zeile, damit wir die Division von komplexen Zahlen umgehen können. Wir betrachten also:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 1 & 0\end{array}\right)$$

Als Nächstes addieren wir das $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-fache der ersten auf die zweite Zeile. Dazu berechnen wir in einer Nebenrechnung das Produkt

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) &= \left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot i^2\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot i\\ &= -1\end{aligned}$$

und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da eine Stufe der Länge 2 vorliegt, wählen wir $x_2 = a$ mit $a \in \mathbb{C}$ und aus der ersten Zeile erhalten wir

$$-x_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot x_2 \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 \ = \ \left(\frac{1}{2}1\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot a.$$

Somit erhalten wir:

$$Eig\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot i}\right) \ = < \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i)\cdot a \\ a \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Analog betrachten wir für $\lambda = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0 \end{array}\right)$$

Zunächst tauschen wir beide Zahlen zu :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir nun das $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$-fache der ersten auf die zweite Zeile, ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wählen wir erneut $x_2 = a$ für $a \in \mathbb{C}$, erhalten wir aus der ersten Zeile

$$-x_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot x_2 \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 \ = \ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot a.$$

Dies führt zum Eigenraum

$$Eig\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) \ = < \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i)\cdot a \\ a \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Insgesamt ergibt dies die Transformationsmatrix

$$S \ = \ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass gilt:

$$D \ = \ \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \end{pmatrix} \ = \ S\cdot A\cdot S^{-1}$$

Lösung zu A.6.2
Für die Diagonalisierbarkeit benötigen wir zunächst das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ -a & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + a^2 = \lambda^2 - 2\cdot\lambda + 1 + a^2$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen wir mittels *pq*-Formel:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - 2\cdot\lambda + 1 + a^2 &=& 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} &=& 1 \pm \sqrt{1^2 - (1+a^2)} \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} &=& 1 \pm \sqrt{-a^2} \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} &=& 1 \pm a\cdot i \end{aligned}$$

Damit A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar sein kann, müssen beide Eigenwerte reell sein, damit das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dies ist lediglich für $a = 0$ der Fall und für diese spezielle Wahl von a gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass A bereits eine Diagonalmatrix, nämlich die Einheitsmatrix, ist.

Da wir für eine 2×2 Matrix zwei Eigenwerte $\lambda = 1 \pm a \cdot i$ erhalten, muss die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmen, wenn wir zwei verschiedene Eigenwerte vorliegen haben. Durch Gleichsetzen folgt der Fall

$$1 + a\cdot i = 1 - a\cdot i \;\Leftrightarrow\; 2\cdot a\cdot i = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0,$$

welchen wir bereits betrachtet haben und direkt zu einer Diagonalmatrix führt. Daher existiert kein $a \in \mathbb{C}$, sodass Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

Lösung zu A.6.3

a) Zunächst starten wir mit der Berechnung der Eigenwerte und daher mit dem charakteristischen Polynom. Dabei nutzen wir bei der Determinante die untere Dreiecksgestalt der Matrix A aus, sodass wir die Diagonalelemente direkt aufmultiplizieren können:

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot (-1-\lambda)$$

Wir erhalten zwei verschiedene Eigenwerte. Den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und den Eigenwert $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit -1.

Im nächsten Schritt berechnen wir die nötigen Eigen- beziehungsweise Hauptvektoren der beiden Eigenwerte und starten mit $\lambda = 1$. Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem zu $ker(A - 1 \cdot I_4)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Als Nächstes addieren wir die erste auf die zweite Zeile und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile erhalten wir $x_4 = 0$ und zusätzlich liegt in der ersten Zeile eine Stufe der Länge 3 vor, sodass wir zwei Variablen frei wählen dürfen. Wichtig ist an dieser Stelle jedoch, dass wir nicht x_2 und x_3 frei wählen, da sich nur diese beiden durch die erste Zeile bedingen. Wir entscheiden uns für $x_3 = a$ und $x_1 = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Damit folgt aus der ersten Zeile

$$2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -a$$

und wir erhalten den Eigenraum

$$Eig(1) = < \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

der Dimension 2. Da die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit ist, betrachten wir im Anschluss $ker(A - 1 \cdot I_4)^2$ und berechnen daher

$$(A - 1 \cdot I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir die erste auf die zweite Zeile, erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und erhalten eine Stufe der Länge 4, sodass wir drei Variablen frei wählen dürfen, jedoch nicht x_2, x_3 und x_4 gleichzeitig. Daher entscheiden wir uns für $x_4 = a$ $x_3 = b$ und $x_1 = c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in die erste Zeile ein, ergibt sich

$$(-4) \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \cdot a - b.$$

Dies führt zum Hauptraum der zweiten Stufe

$$Hau(1) = < \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \cdot a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

mit Dimension 3. Da die algebraische Vielfachheit 3 beträgt, sind wir an dieser Stelle fertig und wählen nun einen Vektor aus $Hau(1)$, der nicht in $Eig(1)$ enthalten ist, also

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Kette berechnen wir daher

$$v_2 = (A - 1 \cdot I_4) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir zwei Vektoren ausgewählt, benötigen jedoch noch einen dritten, da die algebraische Vielfachheit 3 beträgt. Daher wählen wir einen zu diesen beiden Vektoren linear unabhängigen Vektor v_3 aus $Eig(1)$ aus. Für welchen genau wir uns entscheiden, ist dabei nicht entscheidend. Wir wählen

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt die Betrachtung des Eigenwerts $\lambda = -1$ und $ker(A + 1 \cdot I_4)$, sodass wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Theoretisch können wir an dieser Stelle bereits erkennen, dass eine Stufe der Länge 2 bei den Variablen x_1 und x_2 besteht, der Vollständigkeit halber bringen wir die Matrix noch auf die entsprechende Gestalt. Dazu addieren wir die zweite auf die dritte Zeile und im Anschluss ziehen wir das Zweifache der dritten von der vierten Zeile ab und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der zweiten Zeile folgt $x_3 = 0$, während aus der dritten Zeile $x_4 = 0$ erkenntlich wird. Zu bereits angesprochener Stufe der Länge 2 wählen wir $x_2 = a$ für $a \in \mathbb{R}$ und berechnen aus der ersten Zeile

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -a.$$

Damit erhalten wir den Eigenraum

$$Eig(-1) = < \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Da die algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils 1 entspricht, sind wir an dieser Stelle fertig.

Ordnen wir die bisher berechneten Vektoren in einer Matrix an, wobei wir mit dem einen Vektor zum Eigenwert $\lambda = -1$ beginnen und im Anschluss die drei Vektoren zum Eigenwert 1 hinzufügen. Dabei beginnen wir mit dem linear unabhängigen Vektor v_3 und fügen zuletzt den Hauptvektor und den Eigenvektor ein. Damit ist

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt haben wir einen Jordanblock der Länge 1 für den Eigenwert $\lambda = -1$ und einen Block der Länge 3 zum Eigenwert $\lambda = 1$. Da wir eine Kette der Länge 2 (v_1 und v_2) und eine theoretische Kette der Länge 1 (v_3) berechnet haben, entsteht so innerhalb des Blocks der Länge 3 ein Jordanblock der Länge 2 und einer der Länge 1. Bereits ohne Rechnung können wir

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

angeben.

b) Wir starten erneut mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 2\cdot 1\cdot 0 + (-2)\cdot 0\cdot(-1) - 0\cdot(1-\lambda)\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\cdot(2-\lambda) - (3-\lambda)\cdot 0\cdot 2 \\ &= (2 - 3\cdot\lambda + \lambda^2)\cdot(3-\lambda) + 0 + 0 - 0 + (2-\lambda) - 0 \\ &= 6 - 9\cdot\lambda + 3\cdot\lambda^2 - 2\cdot\lambda + 3\cdot\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - \lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\cdot\lambda^2 - 12\cdot\lambda + 8. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt raten wir eine Nullstelle, indem wir alle Teiler von 8 durchgehen und sehen, dass $\lambda = 2$ eine Lösung ist. Daher berechnen wir mittels Polynomdivision

$$\begin{array}{rl}
& (-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 4\cdot\lambda - 4 \\
- & (-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\
\hline
& 4\lambda^2 - 12\lambda \\
& -(4\lambda^2 - 8\lambda) \\
\hline
& -4\lambda + 8 \\
& -(-4\lambda + 8) \\
\hline
& 0
\end{array}$$

und erhalten mit binomischer Formel:

$$-\lambda^2 + 4\cdot\lambda - 4 \;=\; -(\lambda-2)^2.$$

Es liegt somit eine dreifache Nullstelle $\lambda = 2$ vor.

Im nächsten Schritt berechnen wir die zugehörigen Eigen- beziehungsweise Hauptvektoren. Dazu betrachten wir zunächst $ker(A - 2\cdot I_3)$ und daher das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addieren wir nun die erste auf das Zweifache der zweiten und das Zweifache der dritten Zeile, erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und wählen wie im letzten Beispiel $x_3 = a$ sowie $x_1 = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich aus der ersten Zeile

$$2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 \;=\; a$$

und wir erhalten den Eigenraum

$$Eig(2) \;= < \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

mit Dimension 2. Da die algebraische Vielfachheit 3 beträgt, benötigen wir einen weiteren Vektor und betrachten $ker(A - 2\cdot I_3)^2$ und berechnen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Hauptraum zweiter Stufe ist somit gleich dem $\mathbb{R}^3$ und wir wählen als Basis die Standardbasis und benötigen keine weiteren Potenzen.

Nun wählen wir einen Vektor aus $Hau(2) = \mathbb{R}^3$, der nicht bereits in $Eig(2)$ liegt und entscheiden uns für $v_1 = e_3$. Anschließend berechnen wir die zugehörige Kette mit

$$v_2 = (A - 2 \cdot I_3) \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Kette an dieser Stelle zu Ende ist ($A - 2 \cdot I_3 = 0$), gehen wir eine Potenz tiefer und wählen einen zu v_1 und v_2 linear unabhängigen Vektoren aus $Eig(2)$. Wir entscheiden uns für den Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir die Jordan-Normal-Form

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$