StudyHelp

Mathe Abitur Intensivkurs

Lösungen zum Kursbuch

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

Inhalt

Teil I

Lösungen zu Analysis

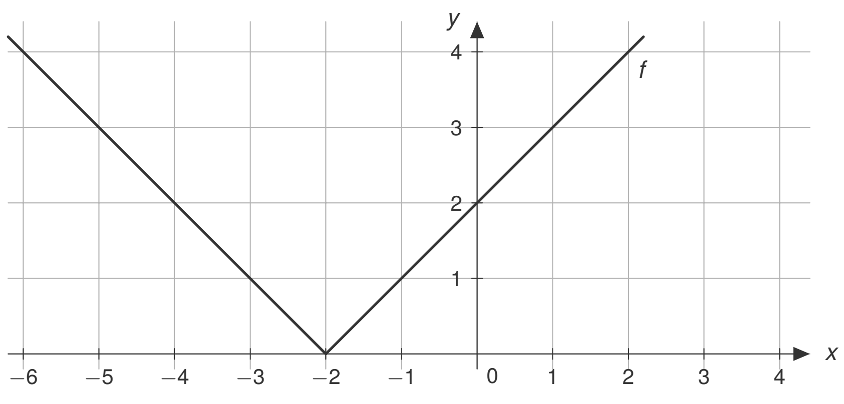
1 Funktionen

1.1 Lösungen

A-1.1.

a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = 4$ c) $f'(x) = \frac{1}{2}$ d) $f'(x) = -3$

A-1.2.



Die Funktion $f(x) = |x + 2|$ ist die um 2 nach links in x-Richtung verschobene Abwandlung der Betragsfunktion: $g(x) = |x|$. Der Funktionswert ergibt sich gemäß der Fallunterscheidung:

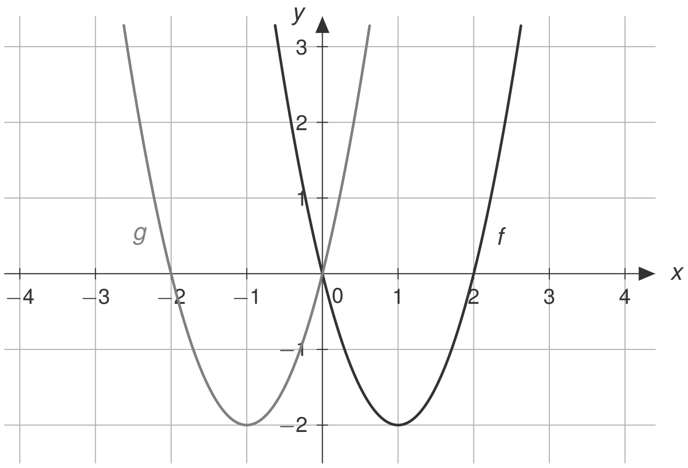
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq -2 \\ -(x + 2) & x < -2 \end{cases}$$

A-1.3. Wir zeichnen jeweils $f(x) = 2x^2 - 4x$ und eine der weiteren drei angegebenen Funktionen ein und vergleichen dann beide Funktionen:

a) $g(x) = 2x^2 + 4x$

Die Funktion $g(x)$ ist die an der y-Achse gespiegelte Funktion $f(x)$:

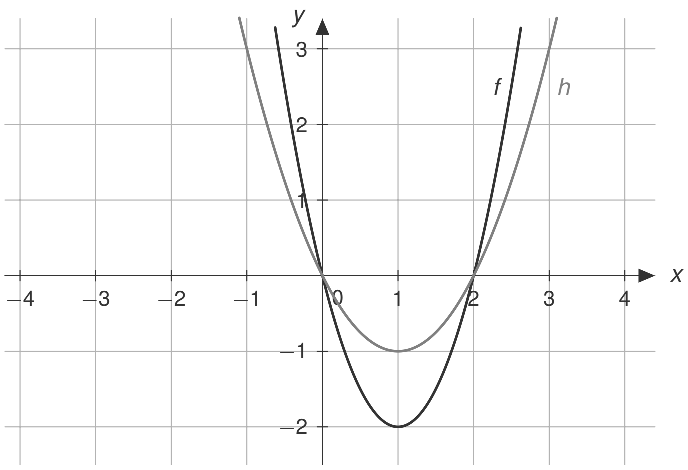
$$g(x) = f(-x)$$



b) $h(x) = x^2 - 2x$

Die Funktion $h(x)$ ist eine um den Faktor $1/2$ gestauchte Funktion

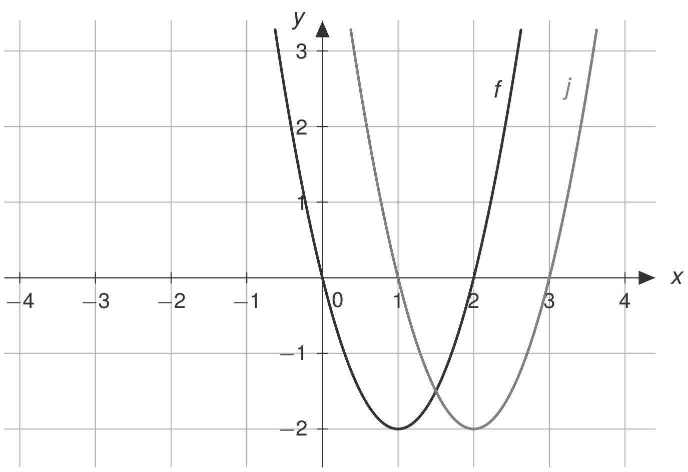
$$h(x) = \frac{1}{2} f(x)$$



c) $j(x) = 2(x-1)^2 - 4(x-1)$

Die Funktion $j(x)$ ist um 1 nach rechts verschoben:

$$j(x) = f(x-1)$$



A-1.4. Aus $f(x) = \frac{x^3}{2} - 1$ folgt...

- Aufstellen von $g(x)$:
  - Spiegelung an der x-Achse:

$$f_1(x) = -f(x) = -\left(\frac{x^3}{2} - 1\right) = -\frac{x^3}{2} + 1$$

  - Stauchung um den Faktor 0,5:

$$f_2(x) = 0{,}5 \cdot f_1(x) = 0{,}5 \cdot \left(-\frac{x^3}{2} + 1\right) = -\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}$$

  - Verschiebung um 1 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung:

$$g(x) = f_3(x) = f_2(x-1) - 1 = -\frac{(x-1)^3}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{(x-1)^3}{4} - \frac{1}{2}$$

- Aufstellen von $h(x)$:
  - Verschiebung um 1 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung

$$f_1(x) = f(x-1) - 1 = \frac{(x-1)^3}{2} - 1 - 1 = \frac{(x-1)^3}{2} - 2$$

  - Stauchung um den Faktor 0,5:

$$f_2(x) = 0{,}5 \cdot f_1(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{x^3}{2} - 2\right) = \frac{(x-1)^3}{4} - 1$$

  - Spiegelung an der x-Achse:

$$h(x) = f_3(x) = -f_2(x) = -\left(\frac{(x-1)^3}{4} - 1\right) = -\frac{(x-1)^3}{4} + 1$$

A-1.5. Die Umkehrfunktion/en erhält man durch Umstellen der Funktionsgleichung

a) $f(x) = x + 2$

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & x+2 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & x & = & y-2 & \mid x \leftrightarrow y \\ \Rightarrow & y & = & x-2 & \\ \Rightarrow & f^{-1}(x) & = & x-2 & \end{array}$$

b) $f(x) = 4x - 2$

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & 4x-2 & \mid +2, \div 4 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{y+2}{4} & \mid x \leftrightarrow y \\ \Rightarrow & y & = & \frac{x+2}{4} & \\ \Rightarrow & f^{-1}(x) & = & \frac{x+2}{4} & \end{array}$$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 9$

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & \frac{1}{3}x+9 & \mid -9, \cdot 3 \\ \Leftrightarrow & x & = & 3y-27 & \mid x \leftrightarrow y \\ \Rightarrow & y & = & 3x-27 & \\ \Rightarrow & f^{-1}(x) & = & 3x-27 & \end{array}$$

d) $f(x) = x^2 + 4$, für $x \geq 0$

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & x^2 + 4 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & y - 4 & \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow & x & = & \sqrt{y-4} & \mid x \leftrightarrow y \\ \Rightarrow & y & = & \sqrt{x-4} & \\ \Rightarrow & f^{-1}(x) & = & \sqrt{x-4} & \end{array}$$

e) $f(x) = (x + 3)^2$, für $x \geq -3$

$$\begin{array}{rrcll} & y & = & (x+3)^2 & \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{y} & = & x + 3 & \mid -3 \\ \Leftrightarrow & x & = & \sqrt{y} - 3 & \mid x \leftrightarrow y \\ \Rightarrow & y & = & \sqrt{x} - 3 & \\ \Rightarrow & f^{-1}(x) & = & \sqrt{x} - 3 & \end{array}$$

2 Gleichungen lösen

2.1 Lösungen

A-2.1.

a)

$$\begin{aligned} 2x-8 &= 0 \quad |+8 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 8 \quad |\div 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x+9 &= 0 \quad |-9 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}x &= -9 \quad |\cdot 3 \\ \Leftrightarrow \quad x &= -27 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 4x-2 &= 4 \quad |+2 \\ \Leftrightarrow \quad 4x &= 6 \quad |\div 4 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^2-16 &= 0 \quad |+16 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 16 \quad |\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x^2+x^3 &= 0 \qquad |x^2 \text{ auskl.} \\ \Leftrightarrow \quad x^2\cdot(1+x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x^2=0 &\vee 1+x=0 \\ \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=0 &\Leftrightarrow x_3=-1 \end{aligned}$$

A-2.2. Wir wenden die *pq*- oder *abc*-Formel an:

a) $x^2+2x-4=0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+4} = -1 \pm \sqrt{5}$

b) $x^2+\frac{1}{2}x-3=0 x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}$

c) $2x^2+4x+4=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2} = -\frac{4}{4} \pm \frac{\sqrt{16-32}}{4} \Rightarrow$ keine Lösung!

d) $8x^2+2x+6=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot8\cdot6}}{2\cdot8} = -\frac{2}{16} \pm \frac{\sqrt{4-192}}{16} \Rightarrow$ keine Lösung!

e) $6x(x+2)+4 = 6x^2+12x+4=0 \Rightarrow x = \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot6\cdot4}}{2\cdot6} = -1 \pm \frac{\sqrt{48}}{12}$

A-2.3. Polynomdivision:

a) Zunächst erste Nullstelle von $f(x) = x^3 - 7x + 6$ durch Probieren herausfinden. Da man weiß, dass der konstante Term 6 ein Vielfaches aller Nullstellen sein muss, versucht man es mit $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ und sehen: $f(1) = (1)^3 - 7 \cdot (1) + 6 = 0$. $x_1 = 1$ ist die erste Nullstelle der Funktion. Mit dieser Information lässt sich nun die Polynomdivision durchführen. Wichtig hierbei ist, dass der x^2 Term nicht vergessen wird:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & & -7x & +6 \big) : \big(x-1\big) = x^2 + x - 6 \\
-x^3 & +x^2 & & & \\
\hline
 & x^2 & -7x & & \\
 & -x^2 & +x & & \\
\hline
 & & -6x & +6 & \\
 & & 6x & -6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

b) Zunächst erste Nullstelle von $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ raten: $f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 4(1) + 1 = 0$. $x_1 = 1$ ist die erste Nullstelle der Funktion. Mit dieser Information lässt sich nun die Polynomdivision durchführen.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & +2x^2 & -4x & +1 \big) : \big(x-1\big) = x^2 + 3x - 1 \\
-x^3 & +x^2 & & & \\
\hline
 & 3x^2 & -4x & & \\
 & -3x^2 & +3x & & \\
\hline
 & & -x & +1 & \\
 & & x & -1 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

A-2.4. x sei die Geschwindigkeit (km/h) des Schiffs ohne Strömung. Dann gilt:

$$6 \cdot (x - 5) = 4 \cdot (x + 5) \Rightarrow 6x - 30 = 4x + 20 \Rightarrow x = 25$$

Antwort: Ohne Strömung fährt das Schiff mit 25km/h

A-2.5.

a) In der Gleichung kommen nur Terme mit $e^{(\cdots)}$ und die 0 vor, daher kann man ausklammern:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & e^{(x+1)} - 3e^{-x} & = & 0 \\
\Leftrightarrow & e^x \cdot \left(e^1 - 3e^{-2x}\right) & = & 0 \\
\Rightarrow & & & e^x = 0 \quad \vee \quad e^1 - 3e^{-2x} = 0
\end{array}
$$

$e^x = 0$ liefert keine Lösung, daher betrachtet man nur den rechten Teil:

$$
\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & e^1 - 3e^{-2x} & = & 0 & \mid -e^1 \mid : (-3) \\
\Leftrightarrow & e^{-2x} & = & \frac{1}{3}e^1 & \mid \ln() \\
\Leftrightarrow & -2x & = & \ln\left(\frac{1}{3}e^1\right) & \mid : (-2) \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}e^1\right) \approx 0{,}049 &
\end{array}
$$

b) Bei dieser Gleichung gibt es nur einen $e^{(\dots)}$ Term:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 6-3e^{2x}+3 &= 0 && \mid +3e^{2x}\\
\Leftrightarrow \quad 9 &= 3e^{2x} && \mid :3 \mid \ln()\\
\Leftrightarrow \quad \ln(3) &= 2x && \mid :2\\
\Leftrightarrow \quad x &= \tfrac{1}{2}\ln(3) \approx 0{,}549
\end{aligned}$$

c) Diese Gleichung kann man direkt aufteilen

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (2-3x)^2 e^{7x+28} &= 0\\
\Rightarrow \quad (2-3x)^2 = 0 \quad &\vee \quad e^{7x+28} = 0
\end{aligned}$$

Die linke Seite liefert keine Lösung (da, „e hoch irgendwas“ nie O sein kann), man betrachtet also nur die linke Seite $(2-3x)^2 = 0$. Wann ist dieser Ausdruck gleich Null? Wenn das, was in der Klammer steht, gleich Null ist. Die Lösung lautet also $x = 2/3$.

d) Hier stellen wir einfach die Gleichung um:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}e^x + 3 &= -2 && \mid -3 \mid \cdot 2\\
\Rightarrow \quad e^x &= -10 && \lightning
\end{aligned}$$

Keine Lösung, da e Funktion nicht negativ werden kann, bzw. der Logarithmus von -10 nicht definiert ist.

e) Da auf beiden Seiten nur Ausdrücke mit $e^{(\dots)}$ stehen, können wir direkt logarithmieren:

$$\begin{aligned}
e^{7x+28} &= e^2 && \mid \ln()\\
\Rightarrow \quad 7x+28 &= 2 && \mid -28 \mid :7\\
\Leftrightarrow \quad x &= -\tfrac{26}{7}
\end{aligned}$$

A-2.6. Zunächst benötigt man die 1. Ableitung $f'(x) = \frac{10}{x^3}$. Mit $x_{\text{start}} = x_{\text{alt}} = 3$ den 1. Schritt durchführen:

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{start}} - \frac{f(x_{\text{alt}})}{f'(x_{\text{alt}})} = 3 - \frac{\frac{4}{9}}{\frac{10}{27}} = 3 - \frac{4 \cdot 27}{10 \cdot 9} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Nun setzt man $x_{\text{alt}} = \frac{9}{5}$ und führt den nächsten Schritt durch:

$$x_{neu} = x_{alt} - \frac{f(x_{alt})}{f'(x_{alt})} = \frac{9}{5} + \frac{\frac{-44}{81}}{\frac{1250}{729}} = \frac{1323}{625} = 2{,}1168$$

Das wird solange wiederholt, bis sich x_{neu} zum nächsten Schritt nicht mehr groß ändert.

3 Ableitung

3.1 Lösungen

A-3.1. Einfache Ableitungsregeln:

a) $f(x) = 10 \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = x + 10 \Rightarrow f'(x) = 1$

c) $f(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2$

d) $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

e) $f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

f) $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$

A-3.2. Höhere Ableitungsregeln:

a) $f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)\cdot 1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^5} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x\cdot x^5 - \left(3x^2-4\right)\cdot 5x^4}{\left(x^5\right)^2}$

e) $f(x) = \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x)$

f) $f(x) = x \cdot 3^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot 3^x + x \cdot 3^x \ln(3)$

g) $f(x) = 2x \cdot e^{ax+3} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{ax+3} + 2x \cdot ae^{ax+3}$

A-3.3. Die Ableitung lautet $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x + 2$. Steigung bei $x = -5$ beträgt: $f'(-5) = -(-5) + 2 = 7$. Waagerechte Tangente $\Rightarrow$ Steigung $m = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -x+2 &= 0 \quad \mid +x \\ \Leftrightarrow \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Bei $x = 2$ hat die Funktion eine waagerechte Tangente. Die Gleichung dieser waagrechten Tangenten lautet:

$$t(x) = f(2) = -\frac{1}{2}(2)^2 + 2 \cdot (2) - 5 = -3$$

A-3.4. Differenzenquotient vs. Ableiten

a) Der Differenzenquotient bei $x = 10$ lautet:

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{8}(10+h)^2 + 4\cdot(10+h) - 2 - \left(\frac{1}{8}(10)^2 + 4\cdot(10) - 2\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{8}\left(h^2 + 20h + 100\right) + 40 + 4h - 2 - 50{,}5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{8}h^2 + 2{,}5h + 12{,}5 + 4h - 12{,}5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{8}h^2 + 6{,}5h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{8}h + 6{,}5\right) = 6{,}5\ [\mathrm{m/min}]
\end{aligned}$$

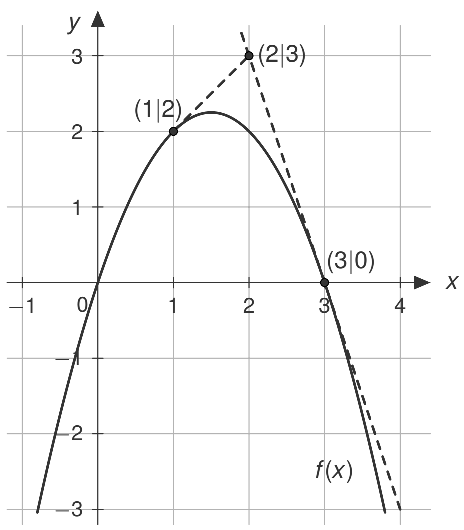
b) Direktes Ableiten: $f'(x) = \frac{1}{4}x + 4$
Auswerten an der Stelle $x = 10$: $v = f'(10) = \frac{1}{4}(10) + 4 = 6{,}5\ [\mathrm{m/min}]$

A-3.5. Der Lichtkegel der Scheinwerfer kann als Tangente an den Graphen $f(x)$ beschrieben werden. Die Steigung der Tangenten an dem Punkt $(x|y)$ kann über zwei Arten ausgedrückt werden:

- Ableitung: $m = f'(x)$
- Steigungsdreieck: $m = \frac{3-f(x)}{2-x}$

Beide Varianten müssen natürlich die gleiche Steigung ergeben. Somit ist dann:

$$\begin{aligned}
& & f'(x) &= \tfrac{3-f(x)}{2-x} \\
&\Leftrightarrow & -2x+3 &= \tfrac{3-\left(-x^2+3x\right)}{2-x} \\
&\Leftrightarrow & (2-x)\cdot(-2x+3) &= 3 + x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow & 2x^2 + 6 - 4x - 3x &= 3 + x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
&\Rightarrow & x_{1,2} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\
& & &= 2 \pm \sqrt{1}
\end{aligned}$$



Man erhält also zwei x-Werte ($x_1 = 3$ und $x_2 = 1$), mit denen man noch die passenden y-Werte finden muss:

$$y_1 = f(x_1) = 0$$
$$y_2 = f(x_2) = 2$$

4 Sekante, Tangente und Normale

4.1 Lösungen

A-4.1.

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ und $x_1 = -1{,}5, x_2 = 0{,}5$

Steigung: $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0-8}{0{,}5-(-1{,}5)} = -4 \Rightarrow y = -4x + b$

y-Achsenabschnitt, setze $(x_1|y_1)$ ein:

$$\begin{array}{rrcll} & 8 & = & -4\cdot(-1{,}5)+b & \\ \Leftrightarrow & 8 & = & 6+b & |-6 \\ \Leftrightarrow & b & = & 2 & \\ \Rightarrow & y & = & -4x+2 & \end{array}$$

b) $f(x) = 4x^2 - 1$ und $x_1 = -0{,}5, x_2 = 0{,}5$

Steigung: $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0-0}{0{,}5-(0{,}5)} = 0 \Rightarrow y = 0 + b$

y-Achsenabschnitt, setze $(x_1|y_1)$ ein:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & b \\ \Leftrightarrow & b & = & 0 \\ \Rightarrow & y & = & 0 \end{array}$$

c) $f(x) = 2x^2 - 5$ und $x_1 = -5, x_2 = 1{,}5$

Steigung: $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{-0{,}5-45}{1{,}5-(-5)} = -7 \Rightarrow y = -7x + b$

y-Achsenabschnitt, setze $(x_1|y_1)$ ein:

$$\begin{array}{rrcll} & 45 & = & -7\cdot(-5)+b & \\ \Leftrightarrow & 45 & = & 35+b & |-35 \\ \Leftrightarrow & b & = & 10 & \\ \Rightarrow & y & = & -7x+10 & \end{array}$$

d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 10$ und $x_1 = 3, x_2 = 0$

Steigung: $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{10-43}{0-3} = 11 \Rightarrow y = 11x + b$

y-Achsenabschnitt, setze $(x_1|y_1)$ ein:

$$\begin{array}{rrcll} & 43 & = & 11 \cdot (3) + b & \\ \Leftrightarrow & 43 & = & 33 + b & \mid -33 \\ \Leftrightarrow & b & = & 10 & \\ \Rightarrow & y & = & 11x + 10 & \end{array}$$

A-4.2. Zunächst benötigt man die Ableitung $f'(x) = 4x$ und man bestimmt die Steigung:

$$m = f'(-5) = -20 \Rightarrow y = -20x + b$$

Einsetzen von $(-5|f(-5)) \Rightarrow (-5|45)$ liefert:

$$\begin{array}{rrcll} & 45 & = & -20 \cdot (-5) + b & \mid -100 \\ \Leftrightarrow & -55 & = & b & \end{array}$$

Also ist die Tangentengleichung $y = -20x - 55$.

A-4.3.

a) Zunächst bestimmt man die Ableitung $f'(x) = -2x - 1$ und dann die Steigung der Normalen:

$$m = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + b$$

Einsetzen von $(2|f(2)) \Rightarrow (2|-4)$ liefert b:

$$\begin{array}{rrcll} & -4 & = & \frac{1}{5} \cdot (2) + b & \mid -\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow & b & = & -\frac{22}{5} & \\ \Rightarrow & y & = & \frac{1}{5}x - \frac{22}{5} & \end{array}$$

b) Zunächst bestimmt man die Ableitung $f'(x) = 2x - 5$ und dann die Steigung der Normalen:

$$m = -\frac{1}{f'(5)} = -\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + b$$

Einsetzen von $(5|f(5)) \Rightarrow (5|10)$ liefert b:

$$\begin{array}{rrcll} & 10 & = & -\frac{1}{5} \cdot (5) + b & \mid +1 \\ \Leftrightarrow & b & = & 11 & \\ \Rightarrow & y & = & -\frac{1}{5}x + 11 & \end{array}$$

c) Zunächst bestimmt man die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ und dann die Steigung der Normalen:

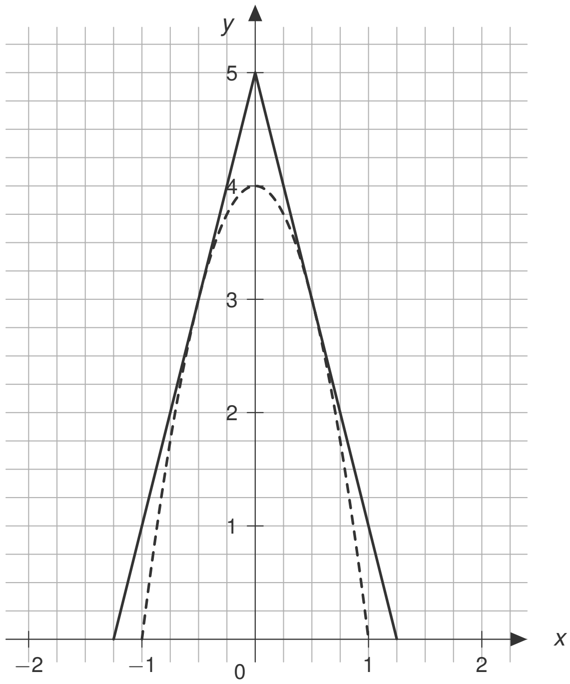
$$m = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Einsetzen von $(2|f(2)) \Rightarrow (2|2)$ liefert b:

$$\begin{aligned} 2 &= \tfrac{1}{3} \cdot (2) + b \quad \left|\, -\tfrac{2}{3}\right. \\ \Leftrightarrow \quad b &= \tfrac{4}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

A-4.4. Aufgabe Spielplatz/Klettergerüst

a) Skizze:



b) Die Funktionsgleichung der Parabel erhält man mit den Informationen aus dem Text. Man legt das Koordinatensystem so, dass die Basis entlang der x-Achse verläuft und die y-Achse die Symmetrieachse der Parabel ist (siehe Skizze). Die Einheit in x und y Richtung sei jeweils in Metern angegeben. Man weiß, dass der Abstand zwischen den Nullstellen der Parabel 2 Meter sein muss; die Nullstellen sind also bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Daraus kann man eine Funktionsgleichung aufstellen:

$$f(x) = a \cdot (x+1)(x-1) = ax^2 - a$$

Zusätzlich weiß man, dass das Klettergerüst 4 Meter hoch ist, also:

$$f(0) = 4 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = -4x^2 + 4$$

c) Das Schlüsselwort im Text ist, dass die Pfosten den Graphen jeweils berühren sollen, es sich also um eine Tangente handelt: $y = m \cdot x + b$. Diese soll den Graphen da berühren, wo $f(x) = 3$ gilt:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 4 &= 3 \qquad |\, -4 \,|\, : (-4) \\ \Rightarrow \qquad x^2 &= \tfrac{1}{4} \qquad |\sqrt{} \\ &= \pm 0{,}5 \end{aligned}$$

Steigung der Tangente bei $x = 0{,}5$ erhält man aus der Ableitung

$$f'(x) = -8x \Rightarrow f'(0{,}5) = -4 \Rightarrow y = -4x + b$$

Jetzt fehlt noch der y-Achsenabschnitt. Man setzt dazu den Punkt $(0{,}5|3)$ in die Tangentengleichung ein:

$$\begin{aligned} 0 &= -4x + 5 \quad | -5 \,|\, : (-4) \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1{,}25 \end{aligned}$$

Antwort: Der Pfosten ist also 0,25 Meter vom Fuß des Klettergerüsts entfernt.

5 Kurvendiskussion

5.1 Lösungen

A-5.1. Der Term mit der größten Potenz bestimmt das jeweilige Verhalten unter Beachtung der Vorzeichen der Vorfaktoren. Dafür klammert man den Term mit der höchsten Potenz aus:

a) $f(x) = x^5 - x^3$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^5 - x^3\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] \to +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^5 - x^3\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] \to -\infty$$

b) $f(x) = x^2 - x^3 + 100$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2 - x^3 + 100\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{100}{x^3}\right)\right] \to -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^2 - x^3 + 100\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{100}{x^3}\right)\right] \to +\infty$$

c) $f(x) = \frac{x^2-3}{1-x^3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)} \to 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)} \to 0$$

d) $f(x) = \frac{5-x}{3+x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-x}{3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{5}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{3}{x} + 1\right)} \to -1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x}{3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{5}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{3}{x} + 1\right)} \to -1$$

A-5.2. Man kann die Symmetrie prüfen, indem man die allgemeine Bedingung $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ überprüft:

a) $f(x) = |x|$ ist achsensymmetrisch: $f(-x) = |-x| = |x|$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ ist nicht symmetrisch:

$$f(-x) = \frac{(-x)-2}{(-x)+3} \neq f(x) \quad \wedge \quad f(-x) \neq -f(x)$$

c) $f(x) = -3x^3 + 2x$ ist punktsymmetrisch:

$$f(-x) = -3(-x)^3 + 2(-x) = -\left(-3x^3 + 2x\right) = -f(x)$$

d) $f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$ ist achsensymmetrisch:

$$f(-x) = (-x)^4 - \sqrt{5}(-x)^2$$

e) $f(x) = 2x + \sin(x)$ ist punktsymmetrisch:

$$f(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -(2x + \sin(x)) = -f(x)$$

f) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ist nicht symmetrisch:

$$f(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 8 = x^2 + 6x + 8 \neq f(x) \quad \wedge \quad f(-x) \neq -f(x)$$

A-5.3. Definitionslücken erhält man bei gebrochenen Funktionen z.B. immer dann, wenn der Nenner Null wird

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, also Definitionslücke bei $x = 0$

b) Definitionslücke bei $x = 0$

c) Nullstellen des Nenners finden:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (2x - 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad &\wedge \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

, also Definitionslücken bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

d) Definitionslücken bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -4$

A-5.4. Man kann zunächst die Ableitung bestimmen oder direkt auf Monotonie prüfen:

a) Man betrachtet $f'(x) = 3x^2$ und erkennt, dass gilt: $f'(x) \geq 0$ im Intervall $[0, \infty)$. Damit ist $f(x)$ monoton steigend.

b) Ableitung bestimmen: $f'(x) = \frac{5x^4}{x^3+2} - \frac{3x^2\left(x^5-4\right)}{\left(x^3+2\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^5+5x^2+6\right)}{\left(x^3+2\right)^2}$. Sowohl Zähler als auch Nenner von $f'(x)$ sind größer als 0 für $x \geq 1$, also ist f streng monoton steigend im Intervall $[1, \infty)$.

c) Man bestimmt zunächst die Ableitung für $x \neq 0{,}5$ (Definitionslücke): $f'(x) = \frac{4x(2x-1)-2x^2(2)}{(2x-1)^2}$ und deren Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{4x(2x-1)-2x^2(2)}{(2x-1)^2} &= 0\\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{8x^2-4x-4x^2}{(2x-1)^2} &= 0\\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{4x^2-4x}{(2x-1)^2} &= 0\\
\Leftrightarrow \quad x = 0 &\wedge 4x-4=0\\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 &\Leftrightarrow x_2 = 1
\end{aligned}$$

Also hat man drei verschiedene Abschnitte: $(-\infty, 0], (0, 1)$, und $[1, \infty)$, in denen entweder $f'(x) < 0$ oder $f'(x) > 0$ ist. Einsetzen eines Wertes aus dem jeweiligen Abschnitt ergibt:

- $f'(-1) > 0 \Rightarrow$ monoton steigend im Bereich $(-\infty, 0]$
- $f'(0,2) < 0 \Rightarrow$ monoton fallend im Bereich $(0, 1)$ (Hinweis: 0,5 kann nicht eingesetzt werden, da es sich hier um eine Definitionslücke handelt.)
- $f'(2) > 0 \Rightarrow$ monoton steigend im Bereich $[1, \infty)$

d) Man bestimmt zunächst die Ableitung: $f'(x) = 2\cos(2x + \pi)$ und die Nullstellen der 1. Ableitung:

$$\begin{aligned}
2\cos(2x+\pi) &= 0\\
\Leftrightarrow \quad \cos(2x+\pi) &= 0\\
\Leftrightarrow \quad 2x+\pi &= \tfrac{\pi}{2} \pm n\cdot\pi\\
\Leftrightarrow \quad x &= -\tfrac{\pi}{4} \pm n\cdot\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion hat unendlich viele periodisch wiederkehrende Nullstellen, was durch das $\pm n \cdot \pi$ angegeben ist. Vorliegend werden jedoch nur Nullstellen benötigt, die sich in dem angegebenen Intervall $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$ befinden, also: $x = -\frac{\pi}{4}$ und $x = -\frac{3\pi}{4}$. Nun bestimmt man noch das Vorzeichen der Ableitung:

- $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow$ monoton steigend im Bereich $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$
- $f'(-\pi) < 0 \Rightarrow$ monoton fallend im Bereich $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$

A-5.5. Man benötigt zunächst die Nullstellen der 1. Ableitung und setzt diese anschließend zum Testen in die 2. Ableitung ein:

a) $f(x) = 4x^2 + 10 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f''(x) = 8$

Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Setzt man diesen Wert in die 2. Ableitung ein, so erhält man $f''(0) = 8$. Dieser Wert ist größer Null, also liegt an der der Stelle $x = 0$ ein Tiefpunkt vor:

$$TP(0|f(0)) \Rightarrow TP(0|10)$$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$

Die 1. Ableitung hat folgende Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$. Diese testet man in der 2. Ableitung: $f''(-2) < 0$ und $f''(0) > 0$. Man hat daher einen Hoch-und einen Tiefpunkt:

$$TP(0|f(0)) \Rightarrow TP(0|4) \text{ und } HP(-2|f(-2)) \Rightarrow HP(-2|8)$$

c) $f(x) = 3x^2 + 10x \Rightarrow f'(x) = 6x + 10 \Rightarrow f''(x) = 6$

Die 1. Ableitung hat nur eine Nullstelle bei $x = -\frac{5}{3}$ und die 2. Ableitung ist immer positiv, daher liegt ein Tiefpunkt vor:

$$TP\left(-\frac{5}{3}|f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) \Rightarrow TP\left(-\frac{5}{3}|-\frac{25}{3}\right)$$

A-5.6.

a) Da x die Anzahl der Tage angibt, ist $x = 2$ in die Funktion einzusetzen:

$$f(2) = 30 \cdot e^{0,5 \cdot 2} \approx 81,55 = 82[\text{ Bakterien }]$$

b) Das Maximum ist am 5. Tag erreicht, kurz bevor das Mittel eingesetzt wird:

$$N_5 = f(5) = 30 \cdot e^{0,5 \cdot 5} \approx 365,47 = 365[\text{ Bakterien }]$$

c) Die Zunahme der Bakterien lässt sich der 1. Ableitung von $f(x)$ entnehmen:

$$f'(x) = 0,5 \cdot 30 \cdot e^{0,5x}$$

Beachtet man nun noch die Form einer solchen e Funktion, so wird klar, dass das Maximum im Abschnitt $[0, 5]$ bei $f'(5) \approx 182,74$ liegt. Die Zunahme der Bakterien ist demnach am 5 Tag am größten.

d) Alle Bakterien sind getötet, wenn $f(x) = 0$ ist. Wie man weil, wird eine e-Funktion allerdings niemals den Wert 0 annehmen. Man muss sich daher ein sinnvolleres Kriterium überlegen: Z.B. den Zeitpunkt, an dem nur noch weniger als 1 Bakterium vorhanden ist. Man berechnet den Tag, an dem nur noch 1 Bakterium vorhanden ist:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 1 & = & 365,47 \cdot e^{-0,8(x-5)} & |:365,47 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{365,47} & = & e^{-0,8(x-5)} & |\ln(\ldots) \\
\Leftrightarrow & \ln\left(\frac{1}{365,47}\right) & = & -0,8 \cdot x + 4 & |:(-0,8)\ | -4 \\
\Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{-0,8} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{365,47}\right) - 4\right) \approx 12,38 &
\end{array}$$

Spätestens an Tag 13 ist weniger als 1 Bakterium vorhanden.

6 LGS lösen

6.1 Lösungen

A-6.1.

a) Wir formen nach derselben Unbekannten um

$$\begin{array}{lrcll}
\text{(I)} & x_1 + 2x_2 & = & 5 & \mid -2x_2 \\
\text{(II)} & 2x_1 + 3x_2 & = & 3 & \mid -3x_2 \mid :2 \\
\hline
\text{(Ia)} & x_1 & = & 5 - 2x_2 & \\
\text{(IIa)} & x_1 & = & 1{,}5 - 1{,}5x_2 &
\end{array}$$

und setzen die Ausdrücke gleich:

$$\begin{array}{lrcll}
 & 5 - 2x_2 & = & 1{,}5 - 1{,}5x_2 & \mid +1{,}5x_2 \\
\Leftrightarrow & 5 - 0{,}5x_2 & = & 1{,}5 & \mid -5 \mid : (-0{,}5) \\
\Leftrightarrow & x_2 & = & 7 &
\end{array}$$

Einsetzen in Ia: $x_1 = 5 - 2 \cdot 7 = -9$.

b) Wir formen nach derselben Unbekannten um

$$\begin{array}{lrcll}
\text{(I)} & -5x_1 + 2x_2 & = & -11 & \mid +5x_1, : 2 \\
\text{(II)} & 6x_1 - x_2 & = & 16 & \mid -6x_1 \mid \cdot (-1) \\
\hline
\text{(Ia)} & x_2 & = & -5{,}5 + 2{,}5x_1 & \\
\text{(IIa)} & x_2 & = & -16 + 6x_1 &
\end{array}$$

und setzen die Ausdrücke gleich:

$$\begin{array}{lrcll}
 & -5{,}5 + 2{,}5x_1 & = & -16 + 6x_1 & \mid -6x_1 \\
\Leftrightarrow & -5{,}5 - 3{,}5x_1 & = & -16 & \mid +5{,}5 \mid : (-3{,}5) \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & 3 &
\end{array}$$

Einsetzen in Ia: $x_2 = -5{,}5 + 2{,}5 \cdot 3 = 2$.

A-6.2.

a)

$$\begin{array}{rrcll}
\text{(I)} & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\text{(II)} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -1 & \mid \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
\text{(III)} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 1 & \mid \text{III} - 3 \cdot \text{I} \\
\hline
\text{(I)} & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\text{(IIa)} & -7x_2 + 3x_3 & = & -5 & \\
\text{(IIIa)} & -10x_2 + 5x_3 & = & -5 & \mid 7 \cdot \text{IIIa} - 10 \cdot \text{IIa} \\
\hline
\text{(I)} & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\text{(IIa)} & -7x_2 + 3x_3 & = & -5 & \\
\text{(IIIb)} & 5x_3 & = & 15 & \Rightarrow x_3 = 3
\end{array}$$

Einsetzen von x_3 in IIa führt zu: $-7x_2 + 3 \cdot 3 = -5 \Rightarrow x_2 = 2$.
Einsetzen von x_2, x_3 in I führt zu: $x_1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$.

b)

$$\begin{array}{rrcll}
\text{(I)} & -3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -6 & \\
\text{(II)} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1 & \mid 3 \cdot \text{II} + 2 \cdot \text{I} \\
\text{(III)} & x_1 + x_2 - 5x_3 & = & 4 & \mid 3 \cdot \text{III} + \text{I} \\
\hline
\text{(I)} & -3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -6 & \\
\text{(IIa)} & -5x_2 + x_3 & = & -9 & \\
\text{(IIIa)} & 5x_2 - 16x_3 & = & 6 & \mid \text{IIIa} + \text{IIa} \\
\hline
\text{(I)} & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 & \\
\text{(IIa)} & -7x_2 + 3x_3 & = & -5 & \\
\text{(IIIb)} & -15x_3 & = & -3 & \Rightarrow x_3 = \frac{1}{5}
\end{array}$$

Einsetzen von x_3 in IIb führt zu: $-5x_2 + 1/5 = -9 \Rightarrow x_2 = 46/25$.
Einsetzen von x_2, x_3 in Ib führt zu: $-3x_1 + 2 \cdot (46/25) - (1/5) = -6 \Rightarrow x_1 = 79/25$.

A-6.3. Zunächst definiert man Variablen, um die Unbekannten in der Aufgabe auszudrücken:

$$\begin{aligned}
x &= \text{Alter von Max} \\
y &= \text{Alter von Max Mutter} \\
z &= \text{Alter von Max Vater}
\end{aligned}$$

Mit den Informationen aus dem Text können wir dann ein Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(I)} & x + y + z & = & 85 \\
\text{(II)} & z - 4 & = & y \\
\text{(III)} & 4x & = & y \Rightarrow x = \frac{y}{4}
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann man durch das Einsetzungsverfahren lösen, indem Gleichung II und III in I einsetzen:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{(I)} & \left(\frac{1}{4}y\right) + y + (y+4) & = & 85 \\
\Leftrightarrow & \frac{9}{4}y & = & 81 \\
\Leftrightarrow & y & = & 36 \\
\text{(II)} & z & = & y + 4 = 36 + 4 = 40 \\
\text{(III)} & x & = & \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \cdot 36 = 9
\end{array}
$$

Max ist also 9, seine Mutter 36 und sein Vater 40 Jahre alt.

7 Modellierungsaufgaben

7.1 Lösungen

A-7.1. Eine allgemeine Funktion 3. Grades und deren zugehörige Ableitung lautet

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{und} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Mit den Informationen aus dem Text kann man Gleichungen aufstellen, um die Unbekannten zu ermitteln:

1. Graph berührt x-Achse bei $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d &= 0 \\ f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

2. Schneidet y-Achse bei 1:

$$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

3. Maximum bei $x = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} f'\left(\tfrac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow \quad \tfrac{16}{3}a + \tfrac{8}{3}b + c &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 16a + 8b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wurde hier noch mit 3 multipliziert, um das Gleichungssystem einfacher zu gestalten. Man hat bereits eine Lösung für d; diese kann man in die anderen Gleichungen einsetzen und es ergibt sich somit das folgende zu lösende Gleichungssystem:

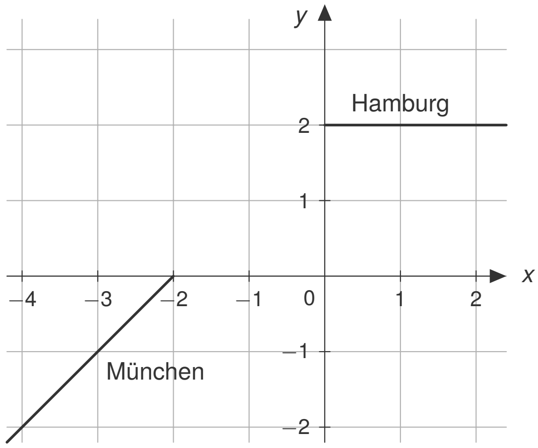
$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 8a + 4b + 2c + 1 &= 0 \\ \text{(II)} \quad 12a + 4b + c &= 0 \\ \text{(III)} \quad 16a + 8b + 3c &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS liefert: $a = -1/4, b = 5/4, c = -2, d = 1$.
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet demnach

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1$$

A-7.2. Als erstes stellt man die Funktionsgleichungen der bereits gebauten Strecken auf; diese ergeben sich aus der neben stehenden Abbildung:

$$g(x) = x + 2$$
$$h(x) = 2$$



Die Informationen *sprungfrei* und *knickfrei* aus dem Text weisen darauf hin, dass es sich um ein Polynom 3. Grades handeln muss.

Da die gesuchte Funktion die bereits vorhandenen Funktionen verbinden soll, gilt:

- ohne Sprung: $g(x_1) = f(x_1)$ und $f(x_2) = h(x_2)$
- ohne Knick: $g'(x_1) = f'(x_1)$ und $f'(x_2) = h'(x_2)$

Die gesuchte Funktionsgleichung und deren Ableitung lautet allgemein:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Aus den Bedingungen folgt:

$$\begin{aligned}
g(-2) &= f(-2) &\Leftrightarrow\quad & 0 = -8a + 4b - 2c + d \\
h(0) &= f(0) &\Leftrightarrow\quad & 2 = d \\
g'(-2) &= f'(-2) &\Leftrightarrow\quad & 1 = 12a - 4b + c \\
h'(0) &= f'(0) &\Leftrightarrow\quad & 0 = c
\end{aligned}$$

Da c und d bereits bestimmt sind, erhalten wir durch Einsetzen der Variablen in Gleichung (I)

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\quad 0 &= -8a + 4b - 2\cdot 0 + 2 \\
\Leftrightarrow\quad 0 &= -8a + 4b + 2
\end{aligned}$$

bzw. in Gleichung (III)

$$\text{(III)}\quad 1 = 12a - 4b + 0$$

Wir addieren Gleichung (I) und (III):

$$\begin{aligned}
\text{(I)} + \text{(III)}\quad 1 &= 4a + 2 \quad | -2, : 4 \\
\Leftrightarrow\quad a &= -\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Anschließend setzen wir a in Gleichung (III) ein und erhalten b mit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad 1 &= 12 \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) - 4b \\
\Leftrightarrow\quad 1 &= -3 - 4b \qquad | + 3 \\
\Leftrightarrow\quad 4 &= -4b \qquad | : (-4) \\
\Leftrightarrow\quad -1 &= b
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle Parameter bestimmt: $a = -1/4, b = -1, c = 0$ und $d = 2$
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2$$

mit $D = [-2; 0]$ (da die Funktion nur in diesem Bereich gelten soll).

8 Extremwertprobleme

8.1 Lösungen

A-8.1. Diese Formeln sollte jeder im Kopf haben:

- **Flächeninhalt A und Umfang U:**
  - Quadrat:
    Sei a die Seitenlänge, dann gilt: $A = a^2$ und $U = 4a$
  - Rechteck:
    Seien a und b die Seitenlängen, dann gilt: $A = a \cdot b$ und $U = 2a + 2b$
  - Gleichschenkliges Dreieck:
    Für ein Dreieck mit den drei Seiten a, b, c, wobei $a = b$ gilt und h die Höhe der Seite c sei, gilt: $A = 0{,}5 \cdot c \cdot h$ und $U = 2a + c$
- **Volumen V**:
  - Würfel:
    Sei a die Seitenlänge, dann gilt: $V = a^3$
  - Quader:
    Seien a, b, c die Seitenlängen (Länge, Breite, Tiefe), dann gilt: $V = a \cdot b \cdot c$
  - Pyramide:
    Sei a die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und h die Höhe der Pyramide, dann gilt: $V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$
  - Kreiszylinders:
    Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Zylinders, dann gilt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

A-8.2. Man stellt zunächst die Hauptbedingung auf: Aus dem Text ergibt sich, dass es sich um eine rechteckige Fläche handelt, deren Umfang minimal sein soll:

$$U(a, b) = 2a + 2b$$

Als Nebenbedingung ist die Mindestgröße der Grünfläche gegeben:

$$A(a, b) = a \cdot b = 500$$

Die Nebenbedingung nach einer Variable umstellen $a = \frac{500}{b}$ und in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\Rightarrow U(b) = 2 \cdot \frac{500}{b} + 2b = \frac{1000}{b} + 2b$$

Da man minimieren möchte, benötigt man die erste Ableitung und setzt diese gleich Null:

$$\begin{aligned} U'(b) = \quad -\tfrac{1000}{b^2} + 2 &\overset{!}{=} 0 && \mid -2, \cdot b^2 \\ \Leftrightarrow \quad -1000 &= -2b^2 && \mid :(-2) \\ \Leftrightarrow \quad 500 &= b^2 && \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad b &= \sqrt{500} \approx 22{,}36 \end{aligned}$$

Einsetzen um a zu bestimmen: $a = \frac{500}{\sqrt{500}} = \sqrt{500} \approx 22{,}36$.

Ein Quadrat hat also das beste Verhältnis von Umfang zu Flächeninhalt. Da gefragt ist, wie viel Zaun benötigt wird, müssen a und b noch in die Formel für den Umfang eingesetzt werden:

$$U = 2a + 2b \Rightarrow U = 2\sqrt{500} + 2\sqrt{500} = 4\sqrt{500} \approx 89{,}44 \text{ [m]}$$

A-8.3. $f(x) = -x^2 + 20$

a) Hauptbedingung:
Flächeninhalt eines Dreiecks

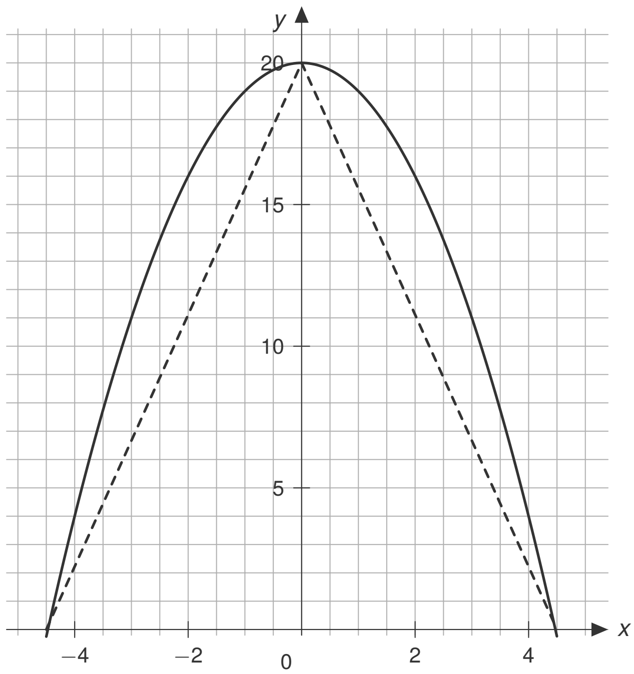
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Da das Dreieck mit der Grundseite auf der x-Achse und ein Punkt auf der Funktion f liegen soll, entspricht der Funktionswert $f(x)$ dieses Punktes der Höhe.

Nebenbedingung:

$$h = f(x) = -x^2 + 20$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{g \cdot \left(-x^2 + 20\right)}{2}$$



Betrachtet man $f(x)$ grafisch, fällt auf, dass die x-Achse nur genau zweimal geschnitten wird. Der Abstand zwischen diesen beiden Nullstellen ist daher die Grundseite g des Dreiecks.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 20 &= 0 && \mid -20 \\ \Leftrightarrow \quad -x^2 &= -20 && \mid \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 20 && \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{20} \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $x_1 = -2\sqrt{5}$ und $x_2 = 2\sqrt{5}$. Also gilt $g = x_2 - x_1 = 4\sqrt{5}$. Darauf folgt:

$$A(x) = \frac{4\sqrt{5} \cdot \left(-x^2 + 20\right)}{2} = -2\sqrt{5} \cdot x^2 + 40\sqrt{5}$$

Für die Maximierung wird die erste Ableitung benötigt: $A'(x) = -4\sqrt{5} \cdot x$. Damit kann der Extrempunkt bestimmt werden:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -4\sqrt{5} \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Da der maximale Flächeninhalt also erreicht wird, wenn die x-Koordinate des Punktes $x = 0$ ist, ist der maximale Flächeninhalt durch $A(0)$ beschrieben.

$$A(0) = \frac{4\sqrt{5} \cdot \left(-(0)^2 + 20\right)}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 20}{2} = 40\sqrt{5} \text{ [FE]}$$

Hinweis: Die hinreichende Bedingung wurde hier nicht weiter überprüft.

b) Hauptbedingung: Flächeninhalt eines Rechtecks

$$A(a, b) = a \cdot b$$

Da der Flächeninhalt maximal sein soll, muss die Seite a auf der x-Achse liegen, während die Seite b auf $f(x)$ liegt. Die Fläche ist hier zusätzlich noch auf den ersten Quadranten beschränkt. Daher folgt:

$$A(x) = x \cdot f(x) \Rightarrow A(x) = x \cdot \left(-x^2 + 20\right) = -x^3 + 20x$$

Zum Maximieren wird die 1. Ableitung bestimmt: $A'(x) = -3x^2 + 20$ und gleich Null gesetzt:

$$\begin{array}{rrcll} A'(x) = 0 & \Rightarrow \quad -3x^2 + 20 & = & 0 & \quad | -20 \\ & \Leftrightarrow \quad -3x^2 & = & -20 & \quad | : (-3) \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 & = & \frac{20}{3} & \quad | \sqrt{} \\ & \Rightarrow \quad x & = & \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2{,}58 & \end{array}$$

An dieser Stelle ist nur die positive Lösung interessant, da wir uns auf den ersten Quadranten beschränken! Einsetzen von $x \approx 2{,}58$ in $A(x)$ ergibt:

$$A\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 + 20 \cdot \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 34{,}43 \text{ [FE]}$$

9 Wachstumsprozesse

9.1 Lösungen

A-9.1.

a) Exponentieller Zerfall b) Lineares Wachstum c) Exponentielles Wachstum

A-9.2.

a) $b = 200$ [Liter], also $f(x) = -5x + 200$

b) $x = 10$ einsetzen und den Funktionswert ermitteln:

$$f(10) = -5 \cdot 10 + 200 = 150 \text{ [Liter]}$$

c) Die Hälfte der Wassermenge sind 100 Liter; gesucht ist also der Zeitpunkt, wenn $f(x) = 100$:

$$\begin{aligned} f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad 100 &= -5x + 200 \quad &&| -200 \\ \Leftrightarrow \quad -100 &= -5x &&| : (-5) \\ \Leftrightarrow \quad 20 &= x \end{aligned}$$

Nach 20 Minuten ist nur noch die Hälfte des anfänglichen Wasserstands vorhanden.

A-9.3.

a) Die Formel für die Halbwertzeit ist

$$t_{1/2} = \frac{\ln(0{,}5)}{k}$$

wobei wir den Faktor $k = -0{,}25$ aus der gegebenen Gleichung $f(x) = N \cdot e^{-0{,}25x}$ ablesen können. Es gilt also:

$$t_{1/2} = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}25} \approx 2{,}77 \text{ [Tage]}$$

b) Man fügt die angegebene Funktion und die Information aus dem Aufgabentext zusammen zu $f(x) = 300 \cdot e^{-0{,}25x}$ und stellt folgende Ungleichung auf:

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & 300 \cdot e^{-0{,}25x} & < & 1 & \mid : 300 \\
\Leftrightarrow & e^{-0{,}25x} & < & \frac{1}{300} & \mid \ln() \\
\Leftrightarrow & -0{,}25x & < & \ln\left(\frac{1}{300}\right) & \mid \cdot (-4) \\
\Leftrightarrow & x & > & -4 \cdot \ln\left(\frac{1}{300}\right) & \\
\Leftrightarrow & x & > & 22{,}82 \text{ [Tage]} &
\end{array}$$

A-9.4.

a) Die Kastanie kann maximal 40 Gramm schwer sein, da:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{40 \cdot e^{0{,}05x}}{9 + e^{0{,}05x}} \to 40$$

b) Das maximale Wachstum entspricht dem Wendepunkt der Funktion. Man muss daher zunächst die Nullstellen der 2. Ableitung finden:

$$\begin{array}{lrcll}
f''(x) = & \frac{8{,}1e^{0{,}05x} - 0{,}9e^{0{,}1x}}{\left(e^{0{,}05x}+9\right)^3} & \stackrel{!}{=} & 0 & \mid \cdot \left(e^{0{,}05x} + 9\right)^3 \\
\Leftrightarrow & 8{,}1e^{0{,}05x} - 0{,}9e^{0{,}1x} & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & e^{0{,}05x} \cdot \left(8{,}1 - 0{,}9e^{0{,}05x}\right) & = & 0 &
\end{array}$$

Der e-Term kann nie 0 werden, von daher wird nur der Klammerausdruck betrachtet:

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & 8{,}1 - 0{,}9e^{0{,}05x} & = & 0 & \mid + 0{,}9e^{0{,}05x} \\
\Leftrightarrow & 8,1 & = & 0{,}9e^{0{,}05x} & \mid : 0{,}9 \\
\Leftrightarrow & 9 & = & = e^{0{,}05x} & \mid \ln() \\
\Leftrightarrow & \ln(9) & = & 0{,}05x & \mid \cdot 20 \\
\Leftrightarrow & x & = & 20\ln(9) \approx 43{,}94 &
\end{array}$$

Diesen Wert setzt man in die gegebene 3. Ableitung ein, um den gefundenen Wendepunkt zu überprüfen: $f'''(43,94) \approx -0{,}000625$. Also liegt bei ungefähr 43,94 Tagen die höchste Wachstumsgeschwindigkeit vor. Diese muss nun noch berechnet werden, indem man in die 1. Ableitung den ermittelten x-Wert einsetzt, da die 1. Ableitung hier die Wachstumsgeschwindigkeit angibt.

$$f'(43{,}94) \approx 0{,}5 \;[\mathrm{g}/\text{Tag}]$$

Das größte Wachstum beträgt 0,5 [g/Tag].

10 Integralrechnung

10.1 Lösungen

A-10.1. Verwende jeweils die entsprechenden Integrationsregeln. Die Berechnung der Aufgabenteile a)-c) folgt der allgemeinen Formel

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{9}x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^5 + 2x^2 + x - 10 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5+1}x^{5+1} + 2 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 10x = \frac{1}{36}x^6 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x$

c) $f(x) = 7x^{-2} \Rightarrow F(x) = 7 \cdot \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{7}{x}$

d) $f(x) = 5 \cdot e^x$: Die e-Funktion abgeleitet/integriert bleibt die e-Funktion. Der konstante Vorfaktor ändert sich nicht: $F(x) = 5 \cdot e^x$

e) $f(x) = 2x^3 + \cos(x+2)$: Der erste Term wird nach der allgemeinen Formel (wie in a)-c)) integriert. Die Stammfunktion von $\cos(x)$ ist $\sin(x)$: $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \sin(x+2) = \frac{1}{2}x^4 + \sin(x+2)$

A-10.2. Stammfunktion bestimmen und jeweils die Grenzen einsetzen:

a) $\int_1^6 3x \, dx = 3 \cdot \int_1^6 x \, dx = 3 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^6 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = 3 \cdot 17{,}5 = 52{,}5$

b) $\int_1^2 \frac{1+x}{x} \, dx = \int_1^2 \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x} + 1 \, dx = 3 \cdot [\ln(x) + x]_1^2 = (\ln(2) + 2 - (\ln(1) + 1)) \approx 1{,}69$

c) $\int_0^{2\pi} \cos(3x+10) \, dx = \left[\frac{1}{3}\sin(3x+10)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\sin(3 \cdot 2\pi + 10) - \frac{1}{3}\sin(3 \cdot 0 + 10)$
$= \frac{1}{3}\sin(6\pi + 10) - \frac{1}{3}\sin(10) = 0$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+3) + x \, dx = \left[-\cos(x+3) + \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi}$
$= \left(-\cos(\pi+3) + \frac{1}{2}\pi^2\right) - \left(-\cos(-\pi+3) + \frac{1}{2} \cdot (-\pi)^2\right) = \left(-\cos(3) + \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(-\cos(3) + \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$

e) $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt[2]{1}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt[2]{0}\right) = \frac{2}{3}$

A-10.3. Bei unbestimmten Integralen muss man als Lösung immer alle Stammfunktionen angeben. Im Folgenden wird jedoch auf die Angabe des konstanten Faktors $C \in \mathbb{R}$ verzichtet.

a) $\int 12(x+1)^3\, dx$: Man erkennt die Form $f(u(x)) \cdot u'(x)$ und kann daher die Stammfunktion Integration mittels Substitution bestimmen:

$$f(u(x)) = 12 \cdot (\underbrace{x+1}_{=u(x)})^3 \text{ mit } u'(x) = 1$$

Zunächst $\frac{du}{dx} = u'(x)$ nach dx umstellen: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$
Substitution und Integral lösen:

$$\int 12 \cdot (x+1)^3\, dx = \int 12 \cdot u^3\, du = 12 \cdot \int u^3\, du = 12 \cdot \left[\frac{1}{4}u^4\right] = 3u^4$$

Resubstitution:

$$3u^4 \Rightarrow 3(x+1)^4 \Rightarrow F(x) = 3(x+1)^4$$

b) $\int x \sin(x)\, dx$: Einzeln könnten die beiden Terme integriert werden, da es sich hier aber um ein Produkt der beiden Terme handelt, muss mittels Produktintegration (partieller Integration) integriert werden. Bestimme zunächst $u(x)$ und $v'(x)$:

1. Möglichkeit: $u(x) = x$ und $v'(x) = \sin(x) \Rightarrow u'(x) = 1$ und $v(x) = -\cos(x)$
2. Möglichkeit: $u(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = x \Rightarrow u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

Im ersten Fall vereinfacht sich der Term, im zweiten verkompliziert er sich. Man entscheidet sich daher für die 1. Möglichkeit.

$$\begin{aligned}\int x \sin(x)\, dx &= [x \cdot (-\cos(x))] - \int 1 \cdot (-\cos(x))\, dx \\ &= [-x \cdot \cos(x)] + \int \cos(x)\, dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

c) $\int x \sin\left(x^2\right)\, dx$: Man erkennt die Form $f(u(x)) \cdot u'(x)$ und kann daher die Stammfunktion Integration mittels Substitution bestimmen:

$$f(u(x)) = \sin(\underbrace{x^2}_{=u(x)}) \text{ mit } u'(x) = 2x$$

Zunächst $\frac{du}{dx} = u'(x)$ nach dx umstellen:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Substitution und Integral lösen:

$$\int x \cdot \sin\left(x^2\right)\, dx = \int x \cdot \sin(u)\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}\sin(u)\, du = -\frac{1}{2}\cos(u)$$

Resubstitution:

$$-\frac{1}{2}\cos(u) \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)$$

d) $\int x^2 \ln(x)\, dx$: Einzeln könnten die beiden Terme integriert werden, da es sich hier aber um ein Produkt der beiden Terme handelt, muss mittels Produktintegration (partieller Integration) integriert werden. Bestimme zunächst $u(x)$ und $v'(x)$:

1. Möglichkeit: $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2}x$ und $v(x) = x(\ln(x) - 1)$

2. Möglichkeit: $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \frac{1}{3}x^3$

Im ersten Fall verkompliziert sich der Term, im zweiten vereinfacht er sich. Man entscheidet sich daher für die 2. Möglichkeit.

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3\right] - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3\right] - \int \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3\right] - \left[\frac{1}{9}x^3\right] = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

A-10.4. Um die gesuchte Fläche zu bestimmen, muss das Integral von $f(x)$ in den Grenzen von der y-Achse und der Nullstelle mit $x < 0$ bestimmt werden. Man bestimmt zunächst die Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x^3 &= -8 \quad |\sqrt[3]{} \\ \Leftrightarrow \quad x &= -2 \end{aligned}$$

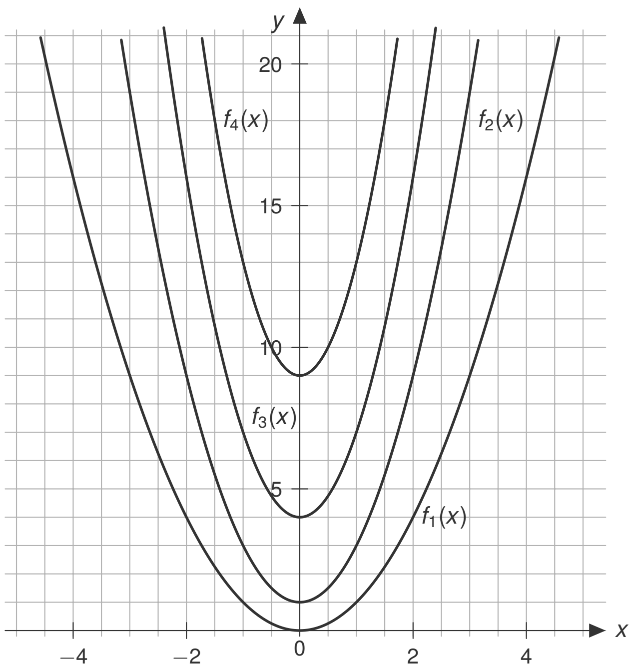
Die untere Integrationsgrenze ist also $a = -2$ und die obere die y-Achse mit $b = 0$.

$$\int_{-2}^{0} x^3 + 8dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 8x\right]_{-2}^{0} = \left(\frac{1}{4} \cdot 0^3 + 8 \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 8 \cdot (-2)\right) = 0 - (-12) = 12 \text{ [FE]}$$

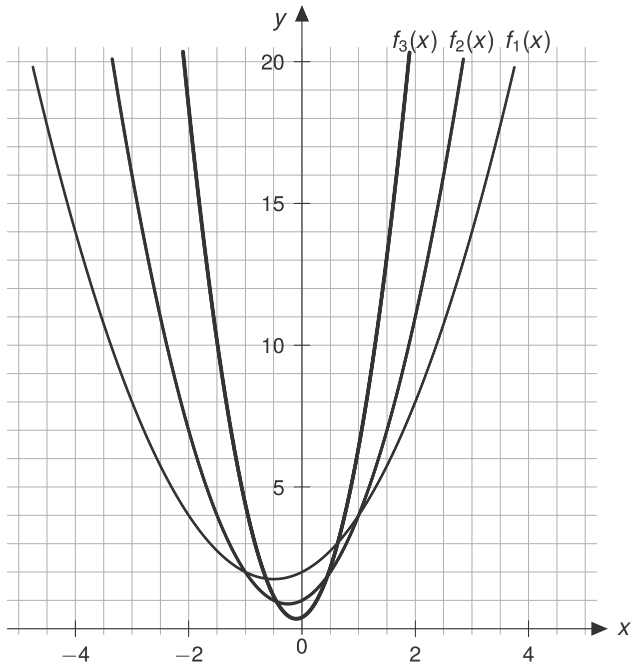
11 Scharfunktionen

11.1 Lösungen

A-11.1. Zeichne die Graphen zu den Funktionen $f_a(x) = ax^2 + (1-a)^2$ mit $a = 1, 2, 3, 4$.



A-11.2. Wir schauen uns die Funktion $f_a(x) = ax^2 + x + \frac{2}{a}$ für $a = 1, 2, 5$ zunächst in einer Skizze an:



Eine Skizze kann hilfreich sein, jedoch können die Beobachtungen können auch an der Funktionsgleichung gemacht werden:

- Alle Funktionen sind nach oben geöffnete ($a > 0$) Parabeln
- Die Graphen der Funktion laufen oberhalb der x-Achse und besitzen demnach alle keine Nullstelle

A-11.3. Gesucht sind Extrema, man benötigt demnach als notwendige Bedingung die Nullstellen der 1. Ableitung der Funktion $f_a(x) = 3x^3 - \frac{3}{a}x^2$:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= 9x^2 - \tfrac{6}{a}x \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(9x - \tfrac{6}{a}\right) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 &= \tfrac{6}{9a} = \tfrac{2}{3a} \end{aligned}$$

Diese beiden möglichen x-Werte (für Extrema) werden mit der hinreichenden Bedingung, der 2. Ableitung $f_a''(x) = 18x - \frac{6}{a}$, geprüft:

$$f_a''(0) = -\frac{6}{a} \text{ bzw. } f_a''\left(\frac{2}{3a}\right) = 18 \cdot \frac{2}{3a} - \frac{6}{a} = \frac{6}{a}$$

Wenn $a < 0$ ist, liegt demnach ein Tiefpunkt bei $x = 0$ und ein Hochpunkt bei $x = \frac{2}{3a}$.
Wenn $a > 0$ so ist es genau anders herum.

Zuletzt müssen noch die jeweiligen y-Werte ermittelt werden:

$$f_a(0) = 0 \text{ bzw. } f_a\left(\frac{2}{3a}\right) = -\frac{4}{9a^3}$$

Es gibt also Extrema bei $E_1(0|0)$ und bei $E_2\left(\frac{2}{3a}| - \frac{4}{9a^3}\right)$.

A-11.4. Punkt $P(1|\sqrt{2})$ soll auf der Funktionsgleichung der Aufgabe **A-11.3.** liegen. Dazu setzt man ihn die Gleichung ein und löst zum Parameter a auf:

$$\begin{aligned} f_a(1) = \quad 3(1)^3 - \tfrac{3}{a}(1)^2 &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \quad 3 - \tfrac{3}{a} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \quad 3 - \sqrt{2} &= \tfrac{3}{a} \\ \Leftrightarrow \quad a &= \tfrac{3}{3-\sqrt{2}} \approx 1{,}89 \end{aligned}$$

Der Punkt $P(1|\sqrt{2})$ liegt auf der Funktionsgleichung, wenn $a \approx 1{,}89$.

12 Specials

Keine Aufgaben vorhanden.

13 Aufgaben auf Abiturniveau

Aufgabe: „Wasserbecken“

a) Aus der Abbildung lässt sich näherungsweise ablesen:

- $V(t = 5) \approx 480\ \mathrm{m}^3$
- Im Intervall $[1{,}4; 5{,}5]$ ist $V(x) \geq 450\ \mathrm{m}^3$

b) Die Tangente schneidet die y-Achse ungefähr bei $y = 370$. Der Funktionswert bei 2 Stunden ist $V(2) \approx 530$. Mit diesen beiden Punkten berechnet man mit Hilfe des Steigungsdreiecks die Gleichung der Tangenten zu:

$$y = 80x + 370$$

c) Das Wasservolumen im Becken sinkt innerhalb der ersten 10 Stunden vom Zeitpunkt t an innerhalb von 6 Stunden 350 Liter ($V(t + 6) = V(t) - 350$). Die Bedingung wird für $t = 5$ nicht erfüllt, denn nach der Graphik ist $V(5) - V(11) = 590 - 200 = 390$.

d) Man bestimmt die Nullstellen von $g(t)$:

$$\begin{aligned}
g(t) = \quad 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right) &= 0 && |:0{,}4 \\
\Leftrightarrow \quad 2t^3 - 39t^2 + 180t &= 0 && |t \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow \quad t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) &= 0 && |\text{ aufteilen} \\
t_1 = 0 \quad &\wedge \quad 2t^2 - 39t + 180 = 0 && |abc - \text{ bzw. } pq - Formel
\end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten demnach $t_1 = 0, t_2 = 7{,}5$ und $t_3 = 12$. Das bedeutet, dass sich an diesen Stellen das Vorzeichen von $g(t)$ ändert. Bleibt nur noch zu bestimmen, was das Vorzeichen in den beiden relevanten Bereichen ist. Dazu setzt man einen Wert aus dem jeweiligem Intervall ein. Z.B. $4 \in (0; 7{,}5)$ und $8 \in (7{,}5; 12)$:

$$g(4) = 0{,}4 \cdot \left(2(4)^3 - 39(4)^2 + 180(4)\right) = 89{,}6$$
$$g(8) = 0{,}4 \cdot \left(2(8)^3 - 39(8)^2 + 180(8)\right) = -12{,}8$$

Also ist $g(t) > 0$ für $0 < t < 7{,}5$ und $g(t) < 0$ für $7{,}5 < t < 12$.

e) Das Integral gibt das insgesamt zu-/abgeflossene Wasser im Zeitintervall $[a; b]$ an, wobei $0 \leq a < b \leq 12$. Das Volumen im Becken nach 7,5 Stunden lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} V(t = 7{,}5) &= 150\ \mathrm{m}^3 + \int_0^{7{,}5} \mathrm{g(t)}\ \mathrm{d}t \\ &= 150\ \mathrm{m}^3 + \int_0^{7{,}5} 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)\ \mathrm{d}t \\ &= 150\ \mathrm{m}^3 + 0{,}4 \cdot \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{39}{3}t^3 + 90t^2\right]_0^{7{,}5} \\ &\approx 150\ \mathrm{m}^3 + 0{,}4 \cdot \left(1160{,}16\ \mathrm{m}^3 - 0\ \mathrm{m}^3\right) \approx 614{,}1\ \mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Aufgabe: „Scharfunktion“

a) Um die Aufgabe zu lösen hilft es zunächst die 4 Funktionen aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^4 - 2 \\ f_1(x) &= x^4 - 2x \\ f_2(x) &= x^4 - 2x^2 \\ f_4(x) &= x^4 - 2x^4 = -x^4 \end{aligned}$$

Mit den Funktionsgleichungen ist nun eine Zuordnung der Graphen möglich, indem man sich die genannten Eigenschaften anschaut:

- $f_4(x)$ hat nur eine Nullstelle bei $x = 0$ und kann somit nur zu Abbildung 2 gehören.
- $f_0(x)$ schneidet die y-Achse bei -2 und kann somit nur zu Abbildung 4 gehören.
- $f_2(x)$ ist achsensymmetrisch, da die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthält. $f_1(x)$ hat keine Symmetrie. Demnach muss $f_2(x)$ zu Abbildung 1 und $f_1(x)$ zu Abbildung 3 gehören.

b) Nun soll das Grenzwertverhalten im Unendlichen betrachtet werden, wobei $n > 4$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^4 - 2x^n\right) = \lim_{x\to\infty} -2x^n \to -\infty$$

Beachte, dass $n > 4$ und somit im Unendlichen der x^n Term schneller wächst als der x^4 Term. Fehlt nun noch die andere Grenze:

$$\lim_{n\to-\infty} x^4 - 2x^n = \lim_{n\to-\infty} -2x^n \to \begin{cases} \infty & n \text{ ungerade} \\ -\infty & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe: „Atmung“

a) Zunächst muss $g(1{,}5)$ berechnet und interpretiert werden:

$$g(1{,}5) = -0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (1{,}5)\right) \approx -0{,}283$$

Das negative Vorzeichen bedeutet laut Aufgabenstellung, dass die Person gerade ausatmet. Der Patient atmet 1,5 Sekunden nach Beginn der Beobachtung 0,283 Liter Luft pro Sekunde aus. Hinweis: Der Taschenrechner muss auf RAD gestellt werden und nicht auf DEG! Warum? RAD immer dann, wenn in der trigonometrsichen Funktion was mit π vorkommt und DEG immer dann, wenn ne Gradzahl dort steht.

b) Das Lungenvolumen ist zu dem Zeitpunkt minimal, wo gerade eine Phase des Ausatmens beendet ist. Laut Aufgabenstellung also das Ende von einem Abschnitt, an dem die Funktion ein negatives Vorzeichen hat. Dies ist zum Beispiel bei $t = 6$ [Sekunden] der Fall, wie sich in der Abbildung ablesen lässt.

c) Wir möchten zunächst die Stammfunktion von $g(t)$ bestimmen:

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t = \int -0{,}4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\,\mathrm{d}t = -0{,}4 \int \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\,\mathrm{d}t$$

Nach der Faktorregel können wir die Konstante $-0{,}4$ aus dem Integral ziehen und bestimmen demnach nur noch die Stammfunktion von $\int \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\,\mathrm{d}t$. Sei $u = \frac{\pi}{2} \cdot t$, dann sei $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{2}$. Wir ersetzen (substituieren) also $\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\mathrm{d}u$ sowie $u = \frac{\pi}{2} \cdot t$ und erhalten:

$$\frac{2}{\pi} \int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{\pi} \cos(u)$$

Nach der Rücksubsitution und mit Einbeziehung des Faktors $-0{,}4$ die Stammfunktion von $g(t)$:

$$-0{,}4 \int \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\,\mathrm{d}t = -0{,}4 \cdot -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \frac{0{,}8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

Hinweis: Wir haben hier das $+C$ für das unbestimmte Integral weggelassen, da wir ja ein bestimmtes Integral berechnen wollen. Jetzt schnappen wir uns die Grenzen und lösen auf:

$$\left[\frac{0{,}8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right]_2^4 \approx 0{,}51 \text{ [Liter]}$$

Betrachtet man den Graphen der Funktion in der Abbildung, so erkennt man, dass man gerade Über einen kompletten Abschnitt integriert hat, in dem die Funktion positiv ist. Da die $g(t)$ die Luftgeschwindigkeit in Liter/s angibt, hat man die Luftmenge in Liter im Abschnitt $2 \leq t \leq 4$ ermittelt. Diese Luftmenge ist die während eines Einatmungsvorgangs eingeatmete Luft.

d) Die Atemfrequenz in Anzahl Atemzyklen pro Minute erhält man, indem man die Einheiten umrechnet:

$$\frac{1 \text{ [Atemzyklus]}}{4 \text{ [s]}} = \frac{15 \text{ [Atemzyklus]}}{60 \text{ [s]}} = \frac{15 \text{ [Atemzyklus]}}{1 \text{ [min]}}$$

Die um 20% erhöhte Frequenz beträgt 18 Atemzyklen pro Minute. Dafür beträgt die Zeit für einen Atemzyklus:

$$t_{\text{Zyklus}} = \frac{60}{18} \text{ [s]} = \frac{10}{3} \text{ [s]}$$

Eine Sinus-Funktion $f(x) = \sin(b \cdot t)$ mit dieser Periode ergibt sich mit:

$$b \cdot \frac{10}{3} = 2\pi \Rightarrow b = 2\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}\pi$$

Teil II

Lösungen zu Analytische Geometrie

14 Vektoren

14.1 Lösungen

A-14.1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechne:

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $3\vec{d} + 2\vec{e} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 30 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 32 \\ -9 \end{pmatrix}$

(iv) $\vec{a} + 0{,}5\vec{c} - 4\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(v) $\vec{b} \bullet \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 8$

(vi) $\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$

(vii) $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(viii) $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -[\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}]$

(ix) $\overrightarrow{d} \times \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot (-3) - (-3) \cdot 10 \\ -3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 10 - 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(x) $|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} + \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21} + \sqrt{14} \approx 8{,}32$

(xi) $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$

(xii) $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 100{,}08^\circ$

b) Ansatz:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow (\mathrm{I}) : 2\lambda + 1\mu = 0 \\ \Rightarrow (\mathrm{II}) : 4\lambda + 10\mu = 0 \\ \Rightarrow (\mathrm{III}) : -1\lambda - 3\mu = 0 \end{array}$$

mit $\lambda = \mu = 0$ als einziger Lösung. Also sind beide Vektoren linear unabhängig.

c) Ansatz:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow (\mathrm{I}) : 2\lambda + 3\mu + 1\delta = 0 \\ \Rightarrow (\mathrm{II}) : 4\lambda - 2\mu + 10\delta = 0 \\ \Rightarrow (\mathrm{III}) : -1\lambda + 1\mu - 3\delta = 0 \end{array}$$

Es gilt also, das LGS zu lösen:

$$\begin{array}{rrcl} (\mathrm{II}) + 2(\mathrm{III}) : & 2\lambda + 4\delta & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & -2\delta \end{array}$$

Wir setzen $\lambda = -2\delta$ in (III) ein und erhalten:

$$\Rightarrow -1 \cdot (-2\delta) + 1\mu - 3\delta = 0 \Leftrightarrow \mu = \delta$$

Alles in (I) eingesetzt: $-4\delta + 3\delta + 1\delta = 0$, also auch erfüllt, da $0 = 0$.

Lösungen sind alle zahlen δ sowie $\mu = \delta$ und $\lambda = -2\delta$, also zum Beispiel: $\delta = \mu = 1, \lambda = -2$. Die drei Vektoren sind also linear abhängig.

d) $A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -16 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{285} \approx 16{,}88$

e) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} \approx 3{,}46$

f) $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -16 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 28$

g) Damit $\vec{a} \perp \vec{f}$ gilt, muss das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0 sein:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 4 - x_3 = 0 \Leftrightarrow 10 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 10$$

A-14.2.

a) $\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}) = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{0B} - \frac{1}{2}\overrightarrow{0A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B})$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3 \\ 3+1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2|2|0)$

b) $\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1+3+4 \\ 3+1+4 \\ -1+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\middle|0\right)$

c) $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-3 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12}$

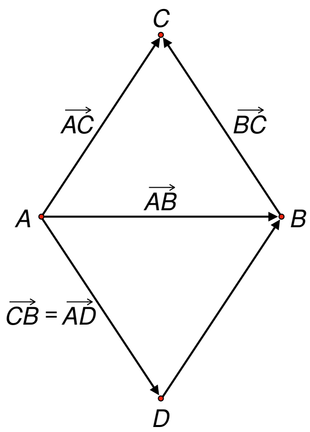
$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-3 \\ 0-(-1) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 4-3 \\ 4-1 \\ 0-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{11}$$

d) Nach Aufgabe c) liegt D gegenüber C. Wir erhalten

$$\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $D(0|0|0)$ liegt also im Koordinatenursprung. Es entsteht die Raute $ADBC$.



A-14.3.

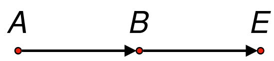
a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$.

Damit ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. Wegen $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ gilt $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sind gegenüberliegende Winkel gleich groß und nebeneinanderliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$. Damit sind alle Winkel rechtwinklig und das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck. Für den Flächeninhalt erhält man:

$$A_{\text{Rechteck}} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 4 \cdot 5 = 20$$

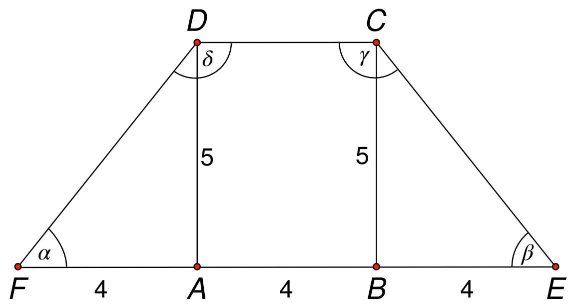
b) Es ist

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-(-2) \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$$



Somit liegt E auf der Halbgeraden $[AB$ (nämlich doppelt so weit entfernt von A wie B), aber nicht auf der Strecke $[AB]$.

c) Wir machen uns zunächst eine Skizze der Situation.



Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{0F} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(3/-6/3)$$

d) Die Skalarprodukt-Beziehung für β ergibt:

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{EC} \bullet \overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EC}| \cdot |\overrightarrow{EB}|} \rightarrow \cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{41} \cdot 4} = \frac{16}{\sqrt{41} \cdot 4} \rightarrow \beta \approx 51{,}34°$$

Nachweis, dass das Trapez den Flächeninhalt von 40 [FE] hat:

$$\begin{aligned} A_{\text{Trapez}} &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{FE}| + |\overrightarrow{DC}|) \cdot |\overrightarrow{AD}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \right) \cdot | \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{12} + 4) \cdot 5 = 40[\text{FE}] \end{aligned}$$

A-14.4.

a) Man muss zeigen, dass die drei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, d.h. das Skalarprodukt zwischen je zwei Vektoren gleich Null ist.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$$

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = 8t + 2t - 10t = 0$$

$$\vec{b} \bullet \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = -4t + 4t + 0 = 0$$

b) Das Volumen des Quaders kann man z.B. mit Hilfe des Spatproduktes berechnen:

$$V_{\text{Quader}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| = 45|t|$$

Analog erhält man auch elementargeometrisch:

$$V_{\text{Quader}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45}|t| = 45|t|$$

und damit: $V_{\text{Quader}} = 15 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{3}$

15 Geraden

15.1 Lösungen

A-15.1.

a) Man wählt $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 7-5 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Damit gilt:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Nun überprüft man, ob $T \in g$ gilt. Gleichsetzen liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & 2-\lambda & = & 2 & \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \text{(II)} & 5+2\lambda & = & 1 & \\ \text{(III)} & 1-\lambda & = & 3 & \end{array}$$

weil $\lambda = 0$ keine Lösung der anderen Gleichungen ist, ist das Gleichungssystem unlösbar: $T \notin g$.

b) Man wählt $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor, denn dieser verläuft parallel zur x_2-Achse. Damit gilt:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Es gilt $T \in g$, weil sich durch Einsetzen von $\lambda = 1$ in die Geradengleichung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0T}$ ergibt.

c) Man wählt den Koordinatenursprung (0|0|0) als Aufpunkt und verwendet den Richtungsvektor der gegebenen Geraden. Damit gilt:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Es gilt $T \notin g$, da die Gleichung $2 = 0 + 2\mu$ für die 1. Komponenten nur die Lösung $\mu = 1$ hat, dies aber keine Lösung der beiden anderen Komponentengleichungen ist.

16 Ebenen

16.1 Lösungen

A-16.1.

a) Mit $\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Stützvektor sowie $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren erhält man die Parameterform:

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe des Normalenvektors $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und A als Aufpunkt ergibt sich somit die Normalenform

$$E : \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

und damit durch Ausmultiplizieren die Koordinatenform

$$E : -17x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 61 = 0$$

b) Man wählt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Stützvektor sowie $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren.

Damit erhält man:

$$\text{Parameterform:} \quad E: \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Koordinatenform:} \quad E: \ x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 2 = 0$$

c) Die Geraden besitzen denselben Aufpunkt und voneinander linear unabhängige Richtungsvektoren. Sie liegen also nicht parallel und schneiden sich in $S(1|2|3)$. Diesen wählt man als Aufpunkt und erhält mit den beiden Richtungsvektoren der Geraden:

$$\text{Parameterform:} \quad E: \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Koordinatenform:} \quad E: \ 13x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2 = 0$$

d) Da E parallel zur $x_1 - x_2$ - Ebene verlaufen soll, wählt man $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren. Die Parameterform lautet:

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Die Koordinatenform ergibt sich (da E parallel zur $x_1 - x_2$-Ebene) bereits aus dem x_3-Wert von B:

$$E: x_3 = 3 \text{ bzw. } E: x_3 - 3 = 0$$

e) Hier ist das Aufstellen der Normalenform sehr leicht. Da $E \perp g_1$, bildet der Richtungsvektor von g_1 den Normalenvektor von E. Als Aufpunkt wählt man wie angegeben Punkt A. Damit lautet die Normalenform:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die Koordinatenform:

$$E: x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 14 = 0$$

Dies muss nun noch in Parameterform umgewandelt werden. Dazu setzt man $x_1 = \lambda$ sowie $x_2 = \mu$ und löst die Gleichung nach x_3 auf:

$$x_3 = 3{,}5 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{4}\mu$$

Untereinanderschreiben der drei Ausdrücke

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & = & 0 & + & 1 \cdot \lambda & + & 0 \cdot \mu \\ x_2 & = & 0 & + & 0 \cdot \lambda & + & 1 \cdot \mu \\ x_3 & = & 3{,}5 & - & \frac{1}{4} \cdot \lambda & - & \frac{3}{4} \cdot \mu \end{array}$$

ergibt die Parameterform:

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

A-16.2.

a) Die Ebene E steht senkrecht auf dem Vektor

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-4 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

welchen man somit als Normalenvektor wählt. Als Stützvektor wählt man den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PP'}$:

$$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0P} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Ausmultiplizieren liefert die Koordinatenform $E : 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 22 = 0$.

b) Wir schauen uns zwei unterschiedliche Vorgehen an:

- Vektoriell:

$$d(P; E) = |\overrightarrow{PM}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \text{ [LE]}$$

- Mit Hilfe der HNF:
  Man dividiert die Ebenengleichung durch den Betrag des Normalenvektors

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

  und multipliziert anschließend mit (-1), um HNF zu erhalten:

$$E_{\text{HNF}} : \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-x_1 + x_2 + 2x_3 - 11) = 0$$

  Einsetzen von P in E_{HNF} liefert auf der linken Seite:

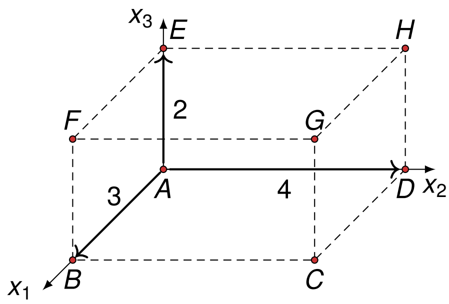
$$\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-1 + 4 + 2 \cdot 7 - 11) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

  Somit gilt $d(P; E) = \sqrt{6}$ [LE].

A-16.3.

a) Eckpunkte des Quaders:

$A(0/0/0), B(3/0/0), C(3/4/0), D(0/4/0)$
$E(0/0/2), F(3/0/2), G(3/4/2), H(0/4/2)$



b) Seitenflächen:

$E_{ABCD} : x_3 = 0, \quad E_{AEFB} : x_2 = 0,$

$E_{ADHE} : x_1 = 0, \quad E_{CDHG} : x_2 = 4,$

$E_{BCGF} : x_1 = 3, \quad E_{EFGH} : x_3 = 2$

17 Lagebeziehungen

17.1 Lösungen

A-17.1.

a) Lage von A zu g_1:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3 & = & -2 + 2\lambda \\ 1 & = & -1 + 3\lambda \\ 6 & = & 3 - 6\lambda \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda & = & 2{,}5 \\ \lambda & = & 2/3 \\ \lambda & = & -0{,}5 \end{array} \Rightarrow A \notin g_1$$

Lage von A zu g_2:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3 & = & 1 + 2\mu \\ 1 & = & 2 - \mu \\ 6 & = & 3 + 3\mu \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \mu & = & 1 \\ \mu & = & 1 \\ \mu & = & 1 \end{array} \Rightarrow A \in g_2$$

b) Lage von A zu E: $E : 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 6 - 2 = 14 \neq 0 \Rightarrow A \notin E$

c) Lage von g_1 zu g_3:
Offensichtlich sind die beiden Richtungsvektoren linear unabhängig voneinander, also schneiden sich die Geraden oder sie sind windschief. Gleichsetzen von g_1 und g_3 liefert:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -2 + 2\lambda & = & -8 - 4\tau \\ \text{(II)} & -1 + 3\lambda & = & -2 + 2\tau \\ \text{(III)} & 3 - 6\lambda & = & 3 - 6\tau \end{array}$$

Auflösen von (I) nach λ ergibt: $\lambda = -3 - 2\tau$. Dies setzt man in (II) ein:

$$\Rightarrow -1 + 3 \cdot (-3 - 2\tau) = -2 + 2\tau \Leftrightarrow \tau = -1$$

Dadurch erhalten wir auch λ. in dem wir $\tau = -1$ in die umgestellte Gleichung (I) einsetzen: $\lambda = -3 - 2 \cdot (-1) = -1$. Einsetzen von λ und τ in (III) liefert die wahre Aussage:

$$\begin{array}{lrcl} & 3 - 6 \cdot (-1) & = & 3 - 6 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & 9 & = & 9 \qquad \checkmark \end{array}$$

Damit schneiden sich die Geraden im Schnittpunkt S mit:

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lage von g_2 zu g_3:
Die Richtungsvektoren sind linear abhängig voneinander:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Geraden identisch oder echt parallel zueinander. Man testet, ob der Aufpunkt von g_2 auf g_3 liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcll} 1 & = & -8 - 4\tau & \\ 2 & = & -2 + 2\tau & \\ 3 & = & 3 - 6\tau & \Leftrightarrow \tau = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin g_3$$

Denn die dritte Gleichung hat nur $\tau = 0$ als Lösung, dies löst aber keine der beiden anderen Gleichungen. Damit sind die Geraden g_2 und g_3 echt parallel zueinander.

d) Damit Punkt $C \in E$ gilt, muss C die Ebenengleichung erfüllen:

$$\begin{array}{rrcl} & 4 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + c - 2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & c & = & -14 \end{array}$$

e) Damit $g_1 \perp G$ gilt, müssen der Richtungsvektor von g_1 und der Normalenvektor von G linear abhängig sein:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcll} 2\lambda + 2\mu & = & 0 & \Leftrightarrow \lambda = -\mu \\ 3\lambda + a \cdot \mu & = & 0 & \Rightarrow (a-3) \cdot \mu = 0 \\ -6\lambda - 2a \cdot \mu & = & 0 & \Rightarrow (3-a) \cdot \mu = 0 \end{array}$$

Also gibt es für $a = 3$ Lösungen $\lambda, \mu \neq 0$, so dass die beiden Vektoren linear abhängig sind mit der Folge, dass: $g_1 \perp G$.

f) Für einen allgemeinen Punkt von F gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 - \sigma - 2\varphi \\ 3 + \sigma - 3\varphi \\ -4 + 5\sigma + 6\varphi \end{pmatrix}$$

Dies setzt man in die Gleichung von E ein:

$$\begin{aligned} 4\cdot(2-\sigma-2\varphi)-2\cdot(3+\sigma-3\varphi)+(-4+5\sigma+6\varphi)-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \sigma &= 4\varphi-4 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung von F und zusammenfassen liefert die Schnittgerade:

$$\begin{aligned} g: \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + (4\varphi-4)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \varphi\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3-4 \\ -4-20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\varphi-2\varphi \\ 4\varphi-3\varphi \\ 20\varphi+6\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -24 \end{pmatrix} + \varphi\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 26 \end{pmatrix}, \varphi\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

g) Für die Spurpunkte von g_1 setzt man jeweils eine Koordinate gleich 0:

- $x_1 = 0$: $0 = -2+2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$

$$\overrightarrow{0S}_{x_2x_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $x_2 = 0$: $0 = -1+3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$\overrightarrow{0S}_{x_1x_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $x_2 = 0$: $0 = 3-6\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0{,}5$

$$\overrightarrow{0S}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

h) Zur Bestimmung der Spurgeraden $g_{x_1x_2}$ von E bestimmt man zunächst die Spurpunkte $S_{x_1 \text{ und } S_{x_2}}$:

- $x_2 = x_3 = 0$: $4x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5 \Rightarrow \overrightarrow{0S}_{x_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $x_1 = x_3 = 0$: $-2x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow \overrightarrow{0S}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit erhält man die Spurgerade

$$g_{x_1x_2}: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0S_{x_1}} + \kappa \cdot \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A-17.2.

a) Zur Bestimmung des Schnittpunktes setzt man die beiden Geraden gleich und lässt das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 5 + \lambda &=& -1 + 2\mu \\ -\lambda &=& 2 \\ 3 &=& -1 + 2\mu \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 6 + \lambda &=& 2\mu \\ \lambda &=& -2 \\ \mu &=& 2 \end{array}$$

Man sieht, dass die erste Zeile durch Einsetzen der Werte von λ und μ erfüllt ist. Damit schneiden sich die beiden Geraden im Punkt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittwinkel $\alpha = \angle(g, h)$ ergibt sich aus den beiden Richtungsvektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

b) Einsetzen der Geraden

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 + 5\lambda \\ 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

in die Gleichung von E liefert:

$$\begin{array}{rrcl} & 3 \cdot (2 + 5\lambda) - 2 \cdot 3\lambda + (-\lambda) - 5 &=& 0 \\ \Leftrightarrow & 8\lambda &=& -1 \\ \Leftrightarrow & \lambda &=& -\frac{1}{8} \end{array}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung von g erhält man den Schnittpunkt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Den Schnittwinkel $\alpha = \angle(g, E)$ berechnet man mit Hilfe des Sinus aus dem Richtungsvektor $(5\ 3\ -1)^T$ der Geraden und dem Normalenvektor $(3\ -2\ 1)^T$ der Ebene:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{8}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{14}}\right) \approx 21{,}19^\circ$$

c) Zur Bestimmung der Schnittgeraden setzt man $x_1 = \lambda$ und betrachtet die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 3\lambda + x_3 - 5 & = & 0 \\ \text{(II)} & -\lambda + 2x_2 + 3x_3 - 1 & = & 0 \end{array}$$

Auflösen von (I) nach x_3 liefert $x_3 = 5 - 3\lambda$. Dies setzt man in (II) ein und löst nach x_2 auf:

$$-\lambda + 2x_2 + 3 \cdot (5 - 3\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -7 + 5\lambda$$

Damit ergibt sich die Schnittgerade

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1\lambda \\ -7 + 5\lambda \\ 5 - 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Den Schnittwinkel $\alpha = \angle(E, F)$ erhält man mit Hilfe des Kosinus aus den beiden Normalenvektoren $(3\ 0\ 1)^T$ und $(-1\ 2\ 3)^T$ der beiden Ebenen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90^\circ$$

Die beiden Ebenen stehen also senkrecht aufeinander.

A-17.3.

a) E ist parallel zur x_2-Achse, da der Normalenvektor $(1\ 0\ 1)^T$ senkrecht auf der x_2-Achse steht. Einsetzen der Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda \\ 2 + \lambda \end{pmatrix}$$

ein die Ebene E ergibt die für alle λ wahre Aussage $-\lambda + (2 + \lambda) = 2 \Rightarrow g \in E$.

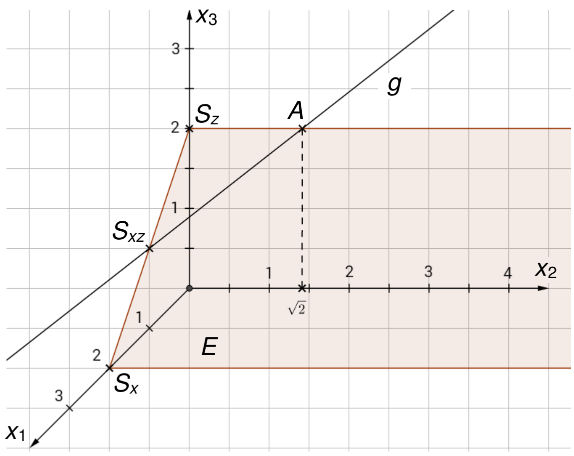
Für die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (= Spurpunkte) setzt man jeweils zwei Koordinaten gleich 0:

- $x_2 = x_3 = 0$: $x_1 = 2 \Rightarrow \overrightarrow{0S_{x_1}} = (2\ 0\ 0)^T$
- $x_1 = x_3 = 0$: $0 = 2 \Rightarrow E$ ist parallel zur x_2-Achse und hat daher keinen Spurpunkt mit dieser (siehe oben)
- $x_1 = x_2 = 0$: $x_3 = 2 \Rightarrow \overrightarrow{0S_{x_3}} = (0\ 0\ 2)^T$

Um die Gerade g zeichnen zu können, berechnet man außerdem den Spurpunkt von g in der $x_1 - x_3$-Ebene:

- $x_2 = 0$ eingesetzt in g ergibt: $\sqrt{2} + \sqrt{2}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{0S_{x_1x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



b) Gesucht ist der Winkel α zwischen g und der $x_1 - x_2$-Ebene. Diese besitzt den Normalenvektor

$\overrightarrow{n}_{x_1x_2} = (0\ 0\ 1)^T$. Damit lässt sich errechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

Der Abschnitt der Achterbahn steigt gegenüber der Horizontalen unter einem Winkel von 30° an.

18 Abstandsberechnung

18.1 Lösungen

A-18.1.

a) Man verwendet das Lotebenen-Verfahren, mit einer Hilfsebene H , die senkrecht auf g steht und durch P verläuft:

$$H: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow H: 2x_1 - x_2 + x_3 - 16 = 0$$

Den Lotfußpunkt von P auf g erhält man als Schnittpunkt S von g und H: Einsetzen des allgemeinen Punktes der Gerade g mit

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -\lambda \\ 2 + \lambda \end{pmatrix}$$

in die Ebene H liefert: $2 \cdot (1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (2 + \lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Damit gilt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten den gesuchten Abstand

$$d(P;g) = |\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{27} \approx 5{,}20 \text{ [LE]}$$

b) Man bestimmt den Abstand der beiden Geraden mittels des Lotebenen-Verfahrens. Mit Hilfe des Aufpunktes und des Richtungsvektors von g erhält man als Gleichung für die Lotebene

$$H: \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow H: -2x_1 - 4x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Einsetzen von Gerade h in Ebene H liefert:

$$-2 \cdot (4 + 6\mu) - 4 \cdot (11 + 12\mu) + (-10 - 3\mu) - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$$

Damit gilt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten den gesuchten Abstand

$$d(g;h) = |\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{69} \approx 8{,}31 \text{ [LE]}$$

c) <u>Lotvektor-Verfahren</u>
Wir wählen zunächst

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 + 2\lambda \\ -1 + 4\lambda \end{pmatrix} \in g \text{ und } \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} -2 + \mu \\ -1 + 2\mu \\ 4 + \mu \end{pmatrix} \in h$$

Daraus folgt:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 + \mu \\ -1 + 2\mu \\ 4 + \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 + 2\lambda \\ -1 + 4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \mu \\ -4 - 2\lambda + 2\mu \\ 5 - 4\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

Damit P und Q die beiden nächstgelegenen Punkte sind, muss der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf den beiden Geraden stehen. wir erhalten das folgende das Gleichungssystem:

$$\text{(I)} \quad \begin{pmatrix} 5 + \mu \\ -4 - 2\lambda + 2\mu \\ 5 - 4\lambda + \mu \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 12 - 20\lambda + 8\mu = 0$$

$$\text{(II)} \quad \begin{pmatrix} 5 + \mu \\ -4 - 2\lambda + 2\mu \\ 5 - 4\lambda + \mu \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 2 - 8\lambda + 6\mu = 0$$

Aus Gleichung (I) folgt $\mu = -1{,}5 + 2{,}5\lambda$, was wir in Gleichung (II) einsetzen und erhalten:

$$\Rightarrow 2 - 8\lambda + 6 \cdot (-1{,}5 + 2{,}5\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Dadurch können wir jetzt auch μ bestimmen: $\mu = -1{,}5 + 2{,}5 \cdot 1 = 1$. Wir erhalten auf diesem Weg die beiden nächstgelegenen Punkte

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 + 2 \cdot 1 \\ -1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} -2 + 1 \\ -1 + 2 \cdot 1 \\ 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Abstand der windschiefen Geraden beträgt

$$d(g;h) = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56} \approx 7{,}48 \text{ [LE]}$$

<u>Parallelebenen-Verfahren</u>
Wir stellen eine Ebene H auf, die g enthält und zu h parallel ist

$$H : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau, \sigma \in \mathbb{R}$$

und wandeln in die HNF um:

$$H : \frac{1}{\sqrt{56}} \cdot (-6x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 56) = 0$$

Anschließend setzen wir den Aufpunkt von h ein und erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{56}} \cdot (-6 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 - 56) = -\frac{56}{\sqrt{56}} = 0$$

Damit folgt für den gesuchten Abstand:

$$d(g;h) = \left| \frac{56}{\sqrt{56}} \right| = \sqrt{56} \approx 7{,}48 \text{ [LE]}$$

d) Wir wenden das Lotgeraden-Verfahren an und setzen die Gerade

$$h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

in die Ebene E ein und lösen nach der Unbekannten λ auf. Wir erhalten $\lambda = -1$ und damit den Lotfußpunkt

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Abstand beträgt

$$d(P;g) = |\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25} = 5 \text{ [LE]}$$

e) g und E sind parallel zueinander, weil die Richtungsvektoren beider linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wandeln die Ebene in die HNF um und erhalten:

$$E_{\text{HNF}} : \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) = 0$$

Anschließend setzen wir den Aufpunkt der Geraden g ein und erhalten $0 = 0$, d.h. die Gerade liegt in der Ebene E ($g \subset E$) und damit ist der Abstand natürlich $d(g;E) = 0$.

A-18.2. Wir wandeln zunächst die Ebene E in HNF um:

$$E_{\text{HNF}} : \frac{1}{5} \cdot (3x_1 - 4x_2 - 15) = 0$$

Damit P den Abstand 1 von E besitzt, muss die linke Seite beim Einsetzen von P gleich 1 oder -1 sein:

$$\frac{1}{5} \cdot (3 \cdot 3a - 4a - 15) \stackrel{!}{=} \pm 1 \Leftrightarrow a - 3 = \pm 1 \Rightarrow a = 2 \vee a = 4$$

A-18.3. Der Punkt A soll von P und Q gleich weit entfernt sein. D.h. es gilt: $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$. Wir schreiben A als allgemeinen Punkt

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ 3 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

und stellen die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{AQ}$ auf:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ 3 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ -\lambda \\ -3 - 2\lambda \end{pmatrix} \text{ bzw. } \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda \\ 1 + \lambda \\ 3 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda \\ 2 - \lambda \\ 4 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir die Länge dieser Vektoren mit dem Betrag

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(3 - 2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-3 - 2\lambda)^2} = \sqrt{9\lambda^2 + 18}$$
$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(4 - 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (4 - 2\lambda)^2} = \sqrt{9\lambda^2 - 36\lambda + 36}$$

und setzen beide Ausdrücke gleich:

$$\begin{aligned} & \sqrt{9\lambda^2 + 18} &=& \sqrt{9\lambda^2 - 36\lambda + 36} \quad | \text{ quadr.} \\ \Leftrightarrow \quad & 9\lambda^2 + 18 &=& 9\lambda^2 - 36\lambda + 36 \\ \Leftrightarrow \quad & 36\lambda &=& 18 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda &=& \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 0{,}5 \\ 1 + 0{,}5 \\ 3 + 2 \cdot 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A(3|1{,}5|4)$$

19 Projektion und Spiegelung

19.1 Lösungen

A-19.1.

a) $P'(-5|2|-1)$

b) $\overrightarrow{0P'} = \overrightarrow{0P} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-11|4|7)$

c) $P'(5|2|-1)$

d) Wir wählen die Ebene E, die durch Punkt P und senkrecht zu g verläuft:

$$E : \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow E : 4x_1 - x_2 - x_3 - 21 = 0$$

E geschnitten mit g liefert den Lotfußpunkt $F(7|4|3)$. Anschließendes spiegeln von P an F ergibt $P'(9|10|5)$.

e) Wir wählen die Gerade g, die durch Punkt P und senkrecht zu E verläuft:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

E geschnitten mit g liefert den Lotfußpunkt $F(0|3|1)$. Anschließendes spiegeln von P an F ergibt $P'(-5|8|1)$.

A-19.2. Projektion und Spiegelung:

a) $g^* : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) E geschnitten mit g liefert $-4\lambda - 2 = 2 \Rightarrow \lambda = -1$ den Schnittpunkt $S(4|2|-2)$. Damit haben wir bereits einen Punkt von g^* gefunden. Jetzt projizieren wir noch den Aufpunkt von g mit Hilfe des Lotgeraden-Verfahrens. Gerade

$$h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

geschnitten mit E liefert $\mu = 2$, also den Lotfußpunkt $F(2|3|0)$. Wir erhalten

$$g^* : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0S} + \tau \cdot \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}$$

c) In Teilaufgabe b) haben wir bereits den Schnittpunkt $S(4|2|-2)$ sowie den Lotfußpunkt $F(2|3|0)$ des Aufpunktes $A(0|3|-2)$ von g ermittelt. Damit können wir nun den Aufpunkt an F spiegeln:

$$\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$g' : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0S} + \tau \cdot \overrightarrow{SA'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \tau \in \mathbb{R}$$

20 Kreise und Kugeln

20.1 Lösungen

A-20.1.

a) $K : (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 2)^2 = 9$

b) $K : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 4)^2 + (x_3 - 2)^2 = 4$

c) Es ist $r = |\overrightarrow{MP}| = \left|(-4 \ -3 \ 0)^T\right| = 5$. Damit: $K : (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 = 25$

d) $M = (-3/9/0), r = \sqrt{5}$

A-20.2. K besitzt den Mittelpunkt $M(1| - 2| - 1)$ und den Radius $r = 2$.

a) Wir berechnen den Abstand der Punkte A und B jeweils zum Mittelpunkt M der Kugel und interpretieren das Ergebnis.

- $|\overrightarrow{MA}| = \left|(1 \ 4 \ 1)^T\right| = \sqrt{18} > r \Rightarrow A$ liegt außerhalb der Kugel.
  Der Abstand zur Kugel beträgt $d(A; K) = \sqrt{18} - 2$ LE.
- $|\overrightarrow{MB}| = \left|(2 \ 0 \ 0)^T\right| = 2 = r \Rightarrow B \in K$

b) Wir setzen die Gerade g mit

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ -2\lambda \\ -8 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

in die Kugelgleichung K ein und erhalten:

$$(4\lambda - 1)^2 + (-2\lambda + 2)^2 + (-8 + 3\lambda + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 29\lambda^2 - 58\lambda + 50 = 0$$

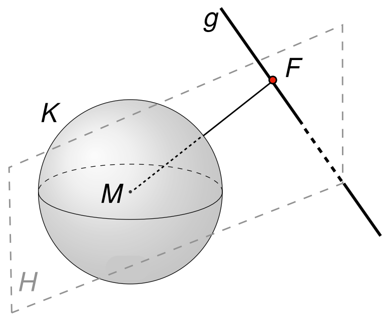
Wenn wir die pq- oder Mitternachtsformel anwenden, werden wir feststellen, dass diese Gleichung keine Lösung besitzt. Interpretation: g ist eine Passante zu K.

Wir berechnen dafür jetzt den Abstand $d(g; K)$ von g zu K, indem wir den Abstand $d(g; M)$ von g zum Mittelpunkt der Kugel berechnen und anschließend den Radius subtrahieren. Zur Berechnung von $d(g; M)$ nehmen wir die Lotebene H, die durch den Mittelpunkt M und senkrecht zur Geraden g verläuft:

$$H: \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow H: 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

Schneiden von H und g liefert $\lambda = 1$ und somit den Lotfußpunkt $F(4|-2|-5)$, wodurch wir zunächst den kürzesten Abstand der Geraden zum Mittelpunkt der Kugel berechnen können:

$$d(g;M) = |\overrightarrow{FM}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 5$$



Wenn wir jetzt den Kugelradius abziehen erhalten wir den gesuchten Abstand:

$$d(g;K) = d(g;M) - r = 5 - 2 = 3 \text{ [LE]}$$

c) Wir bestimmen zunächst den Abstand von E zum Mittelpunkt M. Dazu nehmen wir die Gerade g, die durch den Mittelpunkt M und senkrecht zur Ebene E verläuft:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

E geschnitten mit g liefert $\lambda = \frac{1}{4}$ und damit den Schnittpunkt $M'(1{,}5|-3|-1)$. Es gilt:

$$\left|\overrightarrow{MM'}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1{,}25} < r$$

Damit schneiden sich E und K in einem Schnittkreis mit Mittelpunkt M'. Den Radius erhalten wir mit Hilfe vom Satz des Pythagoras:

$$r' = \sqrt{r^2 - \left|\overline{MM'}\right|^2} = \sqrt{4 - 1{,}25} = \sqrt{2{,}75} \approx 1{,}66 \text{ [LE]}$$

d) Der Normalenvektor der Ebene E lautet $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{MB} = (2\ 0\ 0)^T$ als Aufpunkt verwenden wir den Punkt B. Wir erhalten:

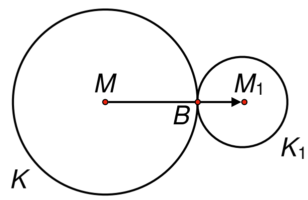
$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow E: 2x_1 - 6 = 0$$

e) $\overrightarrow{MB}$ hat die Länge $r = 2$, $\overline{MM_1}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{MB}$ mit der Länge 3. Also:

$$\overrightarrow{0M_1} = \overrightarrow{0M} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$K_1 : (x_1 - 4)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 1$$



21 Aufgaben auf Abiturniveau

Aufgabe: „Kletteranlage“

a) Wir bestimmen zunächst die Mittelpunkte der beiden Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1,5\\1,5\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{EF}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{0E} + \overrightarrow{0F}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

und anschließend den Abstand zwischen den beiden Mittelpunkten:

$$\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1,5\\1,5\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2 + (-2)^2} = \sqrt{8,5} \approx 2,92$$

Da das Seil 20% länger sein soll, hat das Seil eine Länge von $1,2 \cdot 2,92 \approx 3,5$ Metern.

b) Die Ebene L können wir aus den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EA}$ aufstellen, aus denen wir mit Hilfe des Kreuzproduktes den Normalenvektor für die Normalengleichung der Ebene berechnen:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EA} = \left[\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\\18\end{pmatrix}$$

Die Normalengleichung lautet mit dem Ortsvektor zu E:

$$L : \begin{pmatrix}12\\12\\18\end{pmatrix} \bullet \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

c) Damit wir zeigen können, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat, müssen wir natürlich wissen, welche Eigenschaften ein Trapez hat. Allgemein gilt, dass jedes Viereck mit zwei parallelen Seiten ein Trapez ist. Da wir uns in der Welt der Vektoren befinden, müssen wir also wissen, wann Vektoren parallel sind? Genau, wenn sie Vielfache voneinander sind. Wir schauen uns also die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ (in a) schon berechnet) an:

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{EF} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, sind die beiden Seiten der Kletterwand parallel zueinander und es liegt die Form eines Trapezes vor.

d) Was suchen wir? Den Winkel der Ebene L zur Koordinatenebene x_1x_2. Wie im Kapitel *Lagebeziehung* gezeigt, berechnen wir den Winkel zwischen zwei Ebenen mit Hilfe der Normalenvektoren. Mit $\overrightarrow{n_L} = (12\ 12\ 18)^T$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = (0\ 0\ 1)^T$ folgt mit der Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{n_L} \bullet \overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_L}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|18|}{\sqrt{12^2 + 12^2 + 18^2} \cdot 1} \Rightarrow \alpha \approx 43{,}3^\circ$$

e) Da das Kletternetz an den beiden senkrechten Pfählen befestigt sind, sind die beiden befestigten Seiten parallel zueinander. Zudem sind die Strecken mit 1,80 Metern gleich lang, wodurch wir schon die Höhe des Vierecks kennen. Das aufgespannte Netz entspricht genauer gesagt einem Parallelogramm. Die Flächenformel lautet also: $A = g \cdot h$. Die Höhe haben wir und die Grundseite ist nichts anderes als der Abstand der beiden Pfähle:

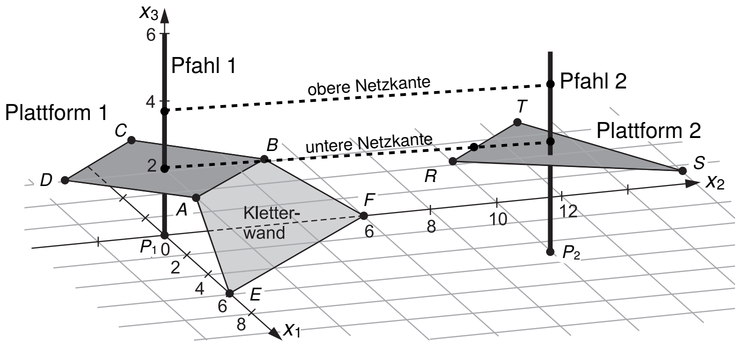
$$A = 1{,}8 \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 1{,}8 \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1{,}8 \cdot \sqrt{5^2 + 10^2 + 0^2} \approx 20{,}1$$

Die Fläche des Netzes beträgt ungefähr 20,1 m^2.

f) Wir fertigen uns zunächst eine Skizze an.

Die untere Netzkante berührt Plattform 2 nur dann, wenn sie einen Schnittpunkt mit der Geraden hat, die durch die Punkte R und T verläuft. Freundlicherweise liegt uns schon die Parameterform der Gerade von der unteren Netzkante vor, bei der die x_3-Koordinate des Richtungsvektors aber abhängig vom Parameter h ist:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$



Also fehlt uns noch die Geradengleichung h, die durch R und T verläuft. Das geht am einfachsten in Parameterform:

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2-5 \\ 10-7 \\ 3+3 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Anschließend müssen wir den Schnittpunkt berechnen, in dem wir die beiden Parameterformen gleich setzen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2-5 \\ 10-7 \\ 3+3 \end{pmatrix}$$

Es entsteht ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 5\lambda & = & 5-3\mu \\ \text{(II)} & 10\lambda & = & 7+3\mu \\ \text{(III)} & 2+\lambda\cdot(h-2) & = & 3 \end{array}$$

bei dem wir durch einfache Addition von (I) und (II) direkt einen gesuchten Parameter bestimmen können:

$$\text{(I)} + \text{(II)} \quad 15\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}8$$

Nun setzen wir $\lambda = 0{,}8$ in (III) ein und erhalten:

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & 2+0{,}8\cdot(h-2) & = & 3 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & 0{,}8\cdot(h-2) & = & 1 & \mid :0{,}8 \\ \Leftrightarrow & h-2 & = & 1{,}25 & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & h & = & 3{,}25 & \end{array}$$

Der untere Eckpunkt des Netzes am zweiten Pfahl hat somit die Koordinaten $(5|10|3{,}25)$ und besitzt daher den Abstand $d = 3{,}25 - 3 = 0{,}25$ Meter.

Teil III

Lösungen zu Lineare Algebra

22 Grundlagen

22.1 Lösungen

A-22.1. Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Multiplikation**: Die Zeilenanzahl der linken Matrix muss der Spaltenanzahl der rechten Matrix entsprechen. Dadurch lassen sich nur die beiden quadratischen Matrizen C und E mit sich selbst multiplizieren:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$E^2 = E \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) **Addition**: Die Dimensionen der Matrizen müssen gleich sein: Dies gilt nur für B mit D und C mit E. Das Ergebnis erhält man dann durch elementweises addieren:

$$B + D = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+3 & 3+0 & 7-1 \\ 2+5 & 1+1 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C + E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 3+4 \\ 1-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ferne können wir, wie bereits erwähnt, Matrizen multiplizieren, wenn die Zeilenanzahl der linken Matrix muss der Spaltenanzahl der rechten Matrix entspricht. Merke, $A \cdot B \neq B \cdot A$! Folgende

Matrizen lassen sich multiplizieren:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6 & 3+3 & 7+0 \\ 8+10 & -6+5 & -14+0 \\ -8-2 & 6-1 & 14+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 18 & -1 & -14 \\ -10 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 3-6 \\ 0+5 & -6-10 \\ 0-1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -16 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+15 & 0+3 & -1-6 \\ -6+25 & 0+5 & 2-10 \\ 6-5 & 0-1 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 3 & -7 \\ 19 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -5 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -6 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A-22.2. Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir können eine Matrix mit einem Vektor multiplizieren, wenn die Spaltenanzahl der Matrix gleich der Komponentenzahl des Vektors ist; demnach sind folgende Produkte möglich:

$$A \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 + 18 \\ 0 - 4 + 0 \\ 0 + 6 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ -4 + 1 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A-22.3.

a) Wir stellen ein LGS auf und lösen nach den Unbekannten a und b auf:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b \\ -a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lrcll} \text{(I)} & 4b & = & 1 & \Leftrightarrow b = \frac{1}{4} \\ \text{(II)} & -a + b & = & -1 & \Rightarrow a = \frac{5}{4} \end{array}$$

b) Wir stellen ein LGS auf und lösen nach den Unbekannten a und b auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b \\ a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & a + 3b & = & 0 \\ \text{(II)} & a - 2b & = & -2 \end{array}$$

Gleichung (I) − (II) liefert: $5b = 2$, also $b = 2/5$. Eingesetzt in (I): $a = -6/5$.

23 Austauschprozesse

23.1 Lösungen

A-23.1. Die Zeilen- und Spaltennummern sind in der Reihenfolge der Fächer: $M - S - E$, die Elemente sind die Wahrscheinlichkeiten für den Wechsel von „Spaltennummer“ zu „Zeilennummer“.

- Zeile 1, Spalte 3: $m_{13} = 0{,}1$:
  Mit der Wahrscheinlichkeit 0,1(= 10%) wechseln Schüler mit heute Englisch als Lieblingsfach in der nächsten Woche zu Mathematik.
- Zeile 2, Spalte 1: $m_{21} = 0{,}3$:
  Mit der Wahrscheinlichkeit 0,3(= 30%) wechseln Schüler mit heute Mathematik als Lieblingsfach in der nächsten Woche zu Sport.
- Zeile 2, Spalte 2: $m_{22} = 0{,}4$:
  Mit der Wahrscheinlichkeit 0,4(= 40%) bleiben Schüler mit heute Sport als Lieblingsfach in der nächsten Woche bei Sport.

A-23.2. Gesucht ist der Fixvektor, also die Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & 0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 & = & x_1 \\ \text{(II)} & 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}2x_3 & = & x_2 \\ \text{(III)} & 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}5x_3 & = & x_3 \end{array}$$

LGS mit Gauß-Algorithmus stufenweise lösen:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & -0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & 4x_2 - 7x_3 & = & 0 \\ \text{(III)} & 0 & = & 0 \end{array}$$

Wir erhalten unendlich viele Lösungen, die alle auf einer Gerade liegen (Fixpunktgerade) und wählen $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$x_2 = \frac{7}{4}t \text{ und } x_1 = \frac{13}{4}t$$

Die Geradengleichung der Fixpunktgerade lautet also:

$$\overrightarrow{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 13/4 \\ 7/4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Wenn nur ganzzahlige Werte sinnvoll sind, kommen für t nur ganzzahlige Vielfache von 4 in Frage.

A-23.3. Die Verteilung ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \text{Mathe} \\ \text{Sport} \\ \text{Englisch} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Für die Verteilung nach einer Woche wird dieser Vektor mit der Übergangsmatrix multipliziert:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14{,}3 \\ 11{,}8 \\ 6{,}9 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass sich die Gesamtsumme aller Schüler nicht ändert (33) und es aufgrund des Sachzusammenhangs nur ganzzahlige Werte Sinn machen.

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Zu lösen ist diese Gleichung als LGS:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder äquivalent jede Gleichung mit 10 multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 200 \\ \text{(II)} & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 100 \\ \text{(III)} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 30 \end{array}$$

Wir vereinfachen das Gleichungssystem und erhalten:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(II*)(I)} - \text{(II)}: & 2x_1 - 5x_3 & = & 100 \\ \text{(II)} - 2 \cdot \text{(III)}: & -x_1 & = & 40 \end{array}$$

Setzen wir $x_1 = -40$ in (II*) ein folgt: $x_3 = -36$. Das LGS ist also nicht lösbar im Definitionsbereich! Diese Gleichung ist nicht lösbar mit positiven ganzen Zahlen x_1, x_3 kleiner als die Schülerzahl 33. Somit gibt keine im Sachzusammenhang sinnvolle Lösung.

Ergänzung: Die obige Matrix M ist invertierbar mit:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 20 \\ 3 & 13 & -27 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Rein rechnerisch erhalten wir damit $(x_1 x_2 x_3)^T = (-40 \; 109 \; -36)^T$ eine Lösung, die im Sachzusammenhang unsinnig ist.

24 Populationsprozesse

24.1 Lösungen

A-24.1. Gegeben ist die Populationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Anfangsverteilung $\overrightarrow{x} = (40\ 40\ 40)^T$.

Um die Population nach einem Monat (= 1 Zeitschritt) zu erhalten, muss P mit der Anfangsverteilung der Population multipliziert werden:

$$P \cdot \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 40 \\ 0{,}25 \cdot 40 \\ 0{,}5 \cdot 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Nach einem Monat gibt es also 320 Eier, 10 Larven und 20 Käfer.

A-24.2. Gesucht ist ein Vektor, welcher bei der Multiplikation mit P unverändert bleibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & 8x_3 & = & x_1 \\ \text{(II)} & 0{,}25x_1 & = & x_2 \\ \text{(III)} & 0{,}5x_2 & = & x_3 \end{array}$$

Wie wählen $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, so lautet der Lösungsvektor $\overrightarrow{x}^T = (8t\ 2t\ t)^T$. Jeder ganzzahlige und positive Wert von t liefert eine sachlich sinnvolle Lösung (wenn keine Einschränkungen, zum Beispiel über maximal mögliche Populationen vorliegen). Eine stabile/stationäre Population besteht also z.B. aus 80 Eiern, 20 Larven und 10 Käfern.

A-24.3.

a) Die Populationsmatrix kann mit den Informationen aus der Aufgabe aufgestellt werden. Wichtig ist, dass dabei angegeben wird, in welcher Reihenfolge die 3 Stufen bezeichnet werden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} \text{Neugeborene} \\ \text{1 Jahr alt} \\ \text{Erwachsene} \end{pmatrix}$$

b) Wir können P^3 sehr einfach angeben, da bereits bekannt ist, wie sich P^3 aus den Einträgen von P ergibt. Damit können wir dann die Population in drei ($\vec{x}_3$), bzw. sechs ($\vec{x}_6$) Jahren berechnen:

$$P^3 = \begin{pmatrix} 8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}76 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}76 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = P^3 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5{,}76 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}76 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 57{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 58 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_6 = P^3 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5{,}76 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}76 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 57{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 332 \end{pmatrix}$$

A-24.4. Einen 3er-Zyklus kann es bei Matrizen in folgender Form geben:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Folgende Matrizen sind gegeben:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}82 & 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der 3er-Zyklus trifft auf alle Matrizen außer auf P_3 und P_5 zu. Für die anderen muss jeweils das Produkt aus $a \cdot b \cdot c$ gebildet werden:

- $P_1 : a \cdot b \cdot c = 30 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 \quad < 1 \Rightarrow$ stirbt aus

- $P_2 : a \cdot b \cdot c = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 \quad \Rightarrow$ bleibt konstant
- $P_4 : a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}1 = 0{,}05 < 1 \Rightarrow$ stirbt aus
- $P_6 : a \cdot b \cdot c = 70 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 3{,}5 \quad > 1 \Rightarrow$ exponentielles Wachstum

Die beiden Matrizen P_3 und P_5 liefern keinen 3er-Zyklus, denn für beide ist kein P^k mit $k = 2, 3$ die Einheitsmatrix E:

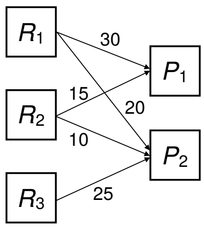
$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} \quad (P_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 40 \\ 0 & 0 & 50 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}16 \end{pmatrix} (P_3)^3 = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 16 \\ 0 & 25 & 20 \\ 0{,}1 & 0{,}08 & 25{,}064 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}82 & 0 \end{pmatrix} \quad (P_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8{,}2 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 1 \\ 0{,}082 & 0{,}164 & 0 \end{pmatrix} (P_5)^3 = \begin{pmatrix} 0{,}82 & 1{,}64 & 0 \\ 0{,}004 & 0{,}828 & 0{,}2 \\ 0{,}0164 & 0{,}0328 & 0{,}82 \end{pmatrix}$$

25 Produktionsprozesse

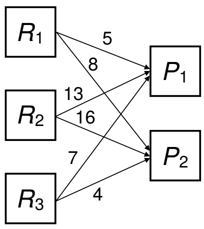
25.1 Lösungen

A-25.1. Aus den Gozintographen lassen sich folgende Tabellen und daraus die folgenden Matrizen erstellen:



	P_1	P_2
R_1	30	20
R_2	15	10
R_3	0	25

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 15 & 10 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$



	P_1	P_2
R_1	5	8
R_2	13	16
R_3	7	4

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 16 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A-25.2. Gegeben:

$$\underline{r} = \text{Rohstoffe} = \begin{pmatrix} \text{Eiche} \\ \text{Kiefer} \\ \text{Kastanie} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{p} = \text{Produkte} = \begin{pmatrix} \text{Modell 1} \\ \text{Modell 2} \\ \text{Modell 3} \end{pmatrix}$$

a) Verbrauchsmatrix:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Wir schreiben zunächst das Produktionsziel auf:

$$\begin{pmatrix} \text{Modell 1} \\ \text{Modell 2} \\ \text{Modell 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend wird die Verbrauchsmatrix damit multipliziert, um die benötigten Rohstoffe zu erhalten:

$$V \cdot \underline{p} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Eiche} \\ \text{Kiefer} \\ \text{Kastanie} \end{pmatrix}$$

Es werden also 9 Einheiten Eiche, 7 Einheiten Kiefer und 8 Einheiten Kastanie benötigt.

A-25.3.

a) Hierzu müssen lediglich die beiden Matrizen, welche Schritt I und Schritt 2 beschreiben, miteinander multipliziert werden:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 9 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 & 69 & 40 \\ 50 & 27 & 15 \\ 96 & 36 & 60 \end{pmatrix}$$

Für Produkt 1 werden also 129 Rohstoffe vom Typ 1, 50 vom Typ 2 und 96 vom Typ 3 benötigt.

b) Gesucht ist der Rohstoffbedarf für

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diesen erhalten wir durch Multiplikation mit der Matrix aus a):

$$\begin{pmatrix} 129 & 69 & 40 \\ 50 & 27 & 15 \\ 96 & 36 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \cdot 20 + 69 \cdot 50 \\ 50 \cdot 20 + 27 \cdot 50 \\ 96 \cdot 20 + 36 \cdot 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6030 \\ 2350 \\ 3720 \end{pmatrix}$$

c) Gesucht ist wieder der Rohstoffbedarf für

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich wie zuvor die benötigten Rohstoffe ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} 129 & 69 & 40 \\ 50 & 27 & 15 \\ 96 & 36 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \cdot 200 + 69 \cdot 450 + 40 \cdot 100 \\ 50 \cdot 200 + 27 \cdot 450 + 15 \cdot 100 \\ 96 \cdot 200 + 36 \cdot 450 + 60 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.850 \\ 23.650 \\ 41.400 \end{pmatrix}$$

Es werden also 60.850 Rohstoffe vom Typ 1, 23.650 vom Typ 2 und 41.400 vom Typ 3 benötigt.

26 Affine Abbildungen

26.1 Lösungen

A-26.1. Eine Projektion auf die y-Achse entspricht der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A-26.2.

- Spiegelung an der x-Achse:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}, E' = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an der y-Achse:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}, E' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Spiegelung am Ursprung:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}, E' = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

A-26.3.

a) Gerade $g : x + y = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1\ 1)^T$ (Normalenvektor)
Gesucht ist der Schnittpunkt mit der Hilfsgeraden

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade in Gerade g einsetzen:

$$\begin{aligned} (x+t)+(y+t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y &= t \end{aligned}$$

Der gesuchte gespiegelte Punkt liegt bei $2t$, also bei:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Ortsvektor zum Bildpunkt von P:

$$\overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Gerade $g : 2x - y = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (2 -1)^T$ (Normalenvektor)

Hilfsgerade: $\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in g: $2(x+2t) - (y-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}(-2x+y)$

Gespiegelter Punkt bei $2t$:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot (-2x+y) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix: $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor zum Bildpunkt von P: $\overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -1{,}4 \end{pmatrix}$

c) Gerade $g : x - 3y = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = (1 -3)^T$ (Normalenvektor)

Hilfsgerade: $\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Einsetzen in g : $(x+1t) - 3(y-3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}(-x+3y)$

Gespiegelter Punkt bei $2t$:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot (-x+3y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix: $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Ortsvektor zum Bildpunkt von P : $\overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

A-26.4. Projektionen sind immer senkrecht. Daher können wir ähnlich vorgehen wie bei einer Spiegelung. Ausgehend von der Geraden und ihrem Normalenvektor

$$g : x + 3y = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (Normalenvektor)}$$

definieren wir als Hilfsgerade

$$h : \overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und suchen den Schnittpunkt mit g:

$$\begin{aligned} (x+t) + 3(y+3t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad t &= -\tfrac{1}{10}(x+3y) \end{aligned}$$

Schnittpunkt (= Projektionspunkt) mit t:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{10}(x+3y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}x - \frac{3}{10}y \\ -\frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Ortsvektor zum Bildpunkt von P : $\overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

Die Abbildungsmatrizen für die Projektionen auf die Geraden aus A-26.3. a)-c) und die Projektion von P auf diese Geraden lassen sich mit den bereits berechneten Werten für t direkt aufstellen:

a) Schnittpunkt (= Projektionspunkt) mit $t = -\frac{1}{2}(x+y)$

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x+y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

Somit sind die Abbildungsmatrix A und der Bildpunkt P' von P:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Schnittpunkt (= Projektionspunkt) mit $t = \frac{1}{5}(-2x + y)$

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(-2x + y) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

Somit sind die Abbildungsmatrix A und der Bildpunkt P' von P:

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$$

c) Schnittpunkt (= Projektionspunkt) mit $t = \frac{1}{10}(-x + 3y)$

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{10}(-x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}x + \frac{3}{10}y \\ \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y \end{pmatrix}$$

Somit sind die Abbildungsmatrix A und der Bildpunkt P' von P:

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{P'} = A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$$

A-26.5. Nachweis, ob Abbildungen einen Fixpunkt oder eine Fixpunktgerade besitzen:

a)

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -y + z & = & x \\ \text{(II)} & -x + 3y - z & = & y \\ \text{(III)} & x + 4y - 2z & = & z \end{array}$$

Lösen wir das Gleichungssystem, erhalten wir mit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine allgemeine Aussage $0 = 0$. Es gibt eine Fixpunktgerade, die bestimmt werden kann, wenn z.B. $z = t$ gesetzt wird. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} z &= t \\ 3y - (2t) = 0 \Leftrightarrow y &= \frac{2}{3}t \\ -x - \left(\frac{2}{3}t\right) + t = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

Die Fixpunktgerade lautet:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t,\ t \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Lösung:

$$\begin{aligned} 9y = 1 \Leftrightarrow y &= \frac{1}{9} \\ 3\left(\frac{1}{9}\right) + z = 1 \Rightarrow z = \frac{6}{9} &= \frac{2}{3} \\ 2x - \left(\frac{1}{9}\right) - 2\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Die Abbildung besitzt einen einzigen Fixpunkt.

c)

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Lösung

$$\begin{aligned} 4y = -5 \Leftrightarrow y &= -\frac{5}{4} \\ 6x - 2\left(-\frac{5}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow x &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Die Abbildung besitzt demnach einen einzigen Fixpunkt.

A-26.6. Gesucht sind die unbekannten Einträge der 2×2-Abbildungsmatrix M:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Um die Koeffizienten der Abbildungsmatrix M zu bestimmen, multiplizieren wir die Matrix mit den Ortsvektoren der Punkte und setzen es dem Ortsvektor des Bildpunktes gleich. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem, welches wir mit den uns bekannten Techniken lösen können.

a) $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha\left(\overrightarrow{x_1}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \alpha\left(\overrightarrow{x_2}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x_1} = \alpha\left(\overrightarrow{x_1}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x_2} = \alpha\left(\overrightarrow{x_2}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir folgende 4 Gleichungen:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & a - 2b & = & 6 \\ \text{(II)} & c - 2d & = & -8 \\ \text{(III)} & 2a + b & = & 7 \\ \text{(IV)} & 2c + d & = & -1 \end{array}$$

In jeweils 2 Gleichungen kommen dabei 2 Variablen vor; daher müssen wir kein Gleichungssystem mit 4 Unbekannten auf einmal lösen, sondern wir lösen zwei kleinere Gleichungssysteme einzeln:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & a - 2b & = & 6 \\ \text{(III)} & 2a + b & = & 7 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4, b = -1$$
$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{(II)} & c - 2d & = & -8 \\ \text{(IV)} & 2c + d & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = -2, d = 3$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \alpha\left(\overrightarrow{x_1}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha\left(\overrightarrow{x_2}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x_1} = \alpha\left(\overrightarrow{x_1}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{x_2} = \alpha\left(\overrightarrow{x_2}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir folgende 4 Gleichungen mit den Lösungen:

$$\begin{array}{rrcll} \text{(I)} & b & = & -2 & \\ \text{(II)} & -d & = & -3 & \Leftrightarrow d = 3 \\ \text{(III)} & 2a - b & = & -2 & \Rightarrow a = 0 \\ \text{(IV)} & 2c - d & = & -5 & \Rightarrow c = -1 \end{array}$$

Somit lautet die Abbildungsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

27 Aufgaben auf Abiturniveau

Aufgabe: „Online-Händler“

a) Anhand der Informationen aus der Aufgabenstellung lässt sich folgende Tabelle aufstellen und daraus die Übergangsmatrix ablesen:

	W	M	V
W	0,85	0,15	0,2
M	0,1	0,7	0,7
V	0,05	0,15	0,1

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

b) Vergleich der Matrix aus a) mit der unter b) angegebenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: alle Spaltensummen sind gleich 1!

Wir stellen fest:

- Es ist nun doppelt so wahrscheinlich, dass Kunden, die zuvor wenig Geld W ausgegeben haben im nächsten Jahr mehr als 500 Euro auszugeben.

  Kunden aus Gruppe M bleiben mit geringerer Wahrscheinlichkeit in dieser Gruppe und haben eine größere Wahrscheinlichkeit, in eine andere Gruppe zu wechseln.

  Für Kunden der Gruppe V ist es deutlich wahrscheinlicher in Gruppe W als in Gruppe M zu wechseln. Das war zuvor genau anders herum.

- Gegebene Verteilung in 2019:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 1.250 \\ 4.400 - 2.650 - 1.250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 1.250 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Verteilung in 2020:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.650 \\ 1.250 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.670 \\ 1.165 \\ 565 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2020 werden also 2.670 Kunden in Gruppe W, 1.165 in Gruppe M und 565 in Gruppe V sein.

- Die Verteilung von vor einem Jahr, also 2018, erhalten wir durch das Lösen der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 1.250 \\ 500 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 4{,}8 & 2{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 10.000 \\ 4.000 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 4{,}6 & 1{,}8 \\ 0 & 1{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 7.350 \\ 1.350 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & 64{,}4 & 25{,}2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 \\ 102.900 \\ 40.800 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung

$$\begin{aligned}
16z = 40.800 &\Leftrightarrow z = 2.550 \\
64{,}4y + 15{,}2 \cdot (2550) = 102.900 &\Leftrightarrow y = 600 \\
0{,}8x + 0{,}2 \cdot (600) + 0{,}6 \cdot 2.550 = 2.650 &\Leftrightarrow x = 1.250
\end{aligned}$$

Und somit die Verteilung von vor einem Jahr: $\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 1.250 \\ 600 \\ 2.550 \end{pmatrix}$

Die Lösung kann probeweise über die Gesamtanzahl geprüft werden:
1.250 + 600 + 2.550 = 4.400

Hinweis: Eine alternative Herangehensweise zur Berechnung der Verteilung vom Vorjahr ist es, die Inverse der 3×3-Matrix zu berechnen und mit der Verteilung des aktuellen

Jahres zu multiplizieren!

$$
\begin{aligned}
& & A \cdot \overrightarrow{x}_{2018} &= \overrightarrow{x}_{2019} & & \mid \cdot A^{-1} \text{ von links, falls existent} \\
&\Leftrightarrow & \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot \overrightarrow{x}_{2018} &= A^{-1} \cdot \overrightarrow{x}_{2019} \\
&\Leftrightarrow & \overrightarrow{x}_{2018} &= A^{-1} \cdot \overrightarrow{x}_{2019}
\end{aligned}
$$

c) Das Unternehmen spricht von einem Fixvektor. Das Vorliegen eines solchen Fixvektors ist daher zu überprüfen (Beachte: In dieser Matrix ist die 3. Spaltensumme $0{,}9 \neq 1$):

$$
\begin{aligned}
& & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -54 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -54 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & -0{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & -1{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -54 \\ -78 \\ -54 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0 & -0{,}6 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -54 \\ -78 \\ -132 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Lösungen:

$$
\begin{aligned}
-0{,}2x_3 = -132 &\Leftrightarrow x_3 = 660 \\
-0{,}6x_2 + 1{,}2(660) = -78 &\Leftrightarrow x_2 = 1.450 \\
-0{,}2x_1 + 0{,}2(1.450) + 0{,}6(660) = -54 &\Leftrightarrow x_1 = 3.700
\end{aligned}
$$

Die vom Unternehmen beschriebene Verteilung existiert! Der Fixvektor lautet

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.700 \\ 1.450 \\ 660 \end{pmatrix}
$$

bei dann insgesamt 5.810 Kunden.

Aufgabe: „Förster“

a) Anhand der Informationen aus der Aufgabenstellung lässt sich folgende Tabelle aufstellen und daraus die Übergangsmatrix ablesen:

	K	M	G
K	0,35	0	0
M	0,6	0,38	0
G	0	0,4	0,99

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}38 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}99 \end{pmatrix}$$

b) Gegebene Verteilung in 2019: $\overrightarrow{x} = (500\ 3.750\ 5.500)^T$

- Verteilung Anfang 2020:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}38 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 3.750 \\ 5.500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \cdot 500 \\ 0{,}6 \cdot 500 + 0{,}38 \cdot 3.750 \\ 0{,}4 \cdot 3.750 + 0{,}99 \cdot 5.500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 175 \\ 1.725 \\ 6.945 \end{pmatrix}$$

  In einem Jahr (2020) gibt es also 175 kleine, 1.725 mittelgroße und 6.945 große Kiefern.

- Gesamtzahl an Bäumen für 2019 und 2020 bestimmen:
  - 2019 : 500 + 3.750 + 5.500 = 9.750
  - 2020 : 175 + 1.725 + 6.945 = 8.845

  Prozentuale Abnahme bestimmen: $\frac{8845}{9750} \approx 0{,}907$

  Von 2019 nach 2020 hat der Bestand an Bäumen also um $1 - 0{,}907 = 0{,}093 = 9{,}3\%$ abgenommen.

- Die Verteilung von vor einem Jahr (also 2018) erhalten wir durch das Lösen der Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}38 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 3.750 \\ 5.500 \end{pmatrix}$$

  Da die Matrix viele Nullen hat, lässt sich dieses Gleichungssystem direkt lösen:

$$\begin{aligned} 0{,}35x = 500 &\Leftrightarrow x \approx 1.429 \\ 0{,}6(1.428{,}57) + 0{,}38y = 3.750 &\Leftrightarrow y \approx 7.613 \\ 0{,}4(7.612{,}78) + 0{,}99z = 5.500 &\Leftrightarrow z \approx 2.480 \end{aligned}$$

c) Das Ziel ist eine stabile bzw. stationäre Baumpopulation von $\overrightarrow{x} = (500\ 800\ 5.500)^T$

Diese soll erreicht werden, indem der Förster selbst Bäume entfernt oder hinzufügt. Dies lässt sich über folgende Abbildung darstellen:

$$\overrightarrow{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}38 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

, wobei der Vektor $(a\ b\ c)^T$ die Neupflanzung bzw. die Fällung von Bäumen der jeweiligen Kategorie beschreibt. Es ist bekannt, dass gelten soll:

$$\begin{pmatrix} 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}38 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \\ 5.500 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}35 \cdot 500 + a \\ 0{,}6 \cdot 500 + 0{,}38 \cdot 800 + b \\ 0{,}4 \cdot 800 + 0{,}99 \cdot 5.500 + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \\ 5.500 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir die Lösungen:

$$\begin{aligned} 0{,}35 \cdot 500 + a = 500 &\Leftrightarrow a = 325 \\ 0{,}6 \cdot 500 + 0{,}38 \cdot 800 + b = 800 &\Leftrightarrow b = 196 \\ 320 + 5445 + c = 5500 &\Leftrightarrow c = -265 \end{aligned}$$

Der Förster muss folglich jedes Jahr 325 kleine und 196 mittelgroBe Bäume anpflanzen und 265 große Bäume fällen, damit eine stabile / stationäre Baumpopulation erreicht wird.

Kleiner Hinweis: Über den Realitätsbezug lässt sich bei dieser Aufgabe sicherlich streiten, denn welcher Förster pflanzt 196 Bäume von mindestens 2m **Höhe nach. Aber das ist ein dauerhaftes Problem bei all diesen *Anwendungsaufgaben*.**

Teil IV

Lösungen zu Stochastik

28 Grundlagen

Keine Aufgaben vorhanden.

29 Baumdiagramme

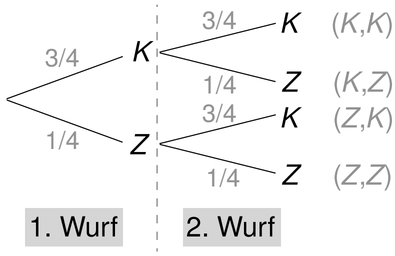
29.1 Lösungen

A-29.1.

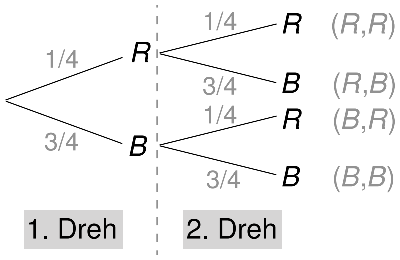
a)
- mit Zurücklegen: $P(S,W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$
- ohne Zurücklegen: $P(S,W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11} = 0{,}273 = 27{,}3\%$

b)
- mit Zurücklegen: $P(A) = P(S,W) + P(W,S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
- ohne Zurücklegen: $P(A) = P(S,W) + P(W,S) = \frac{3}{11} + \frac{3}{11} = \frac{6}{11} = 0{,}545 = 54{,}5\%$

A-29.2. Baumdiagramm:



A-29.3. Baumdiagramm:



a)

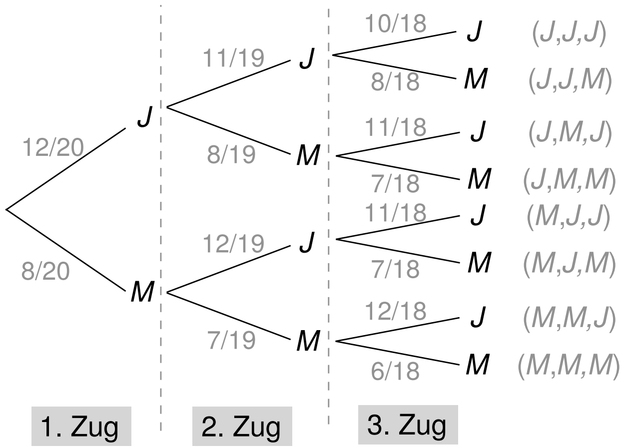
b) $P(R,R) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 6{,}25\%$

c) $P(\text{mind. 1x B}) = P(B,B) + P(R,B) + P(B,R) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 93{,}8\%$

Alternative Lösung mit dem Gegenereignis:

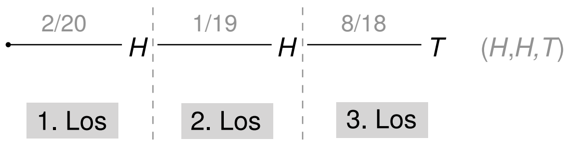
$$P(\text{mind. 1x B}) = 1 - \underbrace{P(R,R)}_{\text{nur } R} = 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = 93{,}8\%$$

A-29.4. Baumdiagramm:



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(J, J, J) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{11}{57} \approx 19\%$

A-29.5. Hier der Teil des zugehörigen Baumdiagramms, der für die Lösung der gestellten Aufgabe relevant ist. Abkürzungen: H = Hauptpreis, T = Trostpreis



a) $P(H, H) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{190} \approx 0{,}005 = 0{,}5\%$

b) Nachdem die beiden Hauptgewinne gezogen wurden, sind noch 18 Lose im Behälter, davon 8 Trostpreise. Also ist jetzt die Wahrscheinlichkeit für einen Trostpreis:

$$\frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444 = 44{,}4\%$$

c) $P(H, H, T) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{855} \approx 0{,}0023 \approx 0{,}23\%$

30 Kombinatorik

30.1 Lösungen

A-30.1.

a) Anzahl möglicher Pin's: $10^4 = 10.000$

b) Anzahl möglicher Pin's mit Ziffern $\neq 0$: $\frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3.024$

A-30.2. Sitzordnung erfordert Beachtung der Reihenfolge

$$10! = 3.628.800$$

A-30.3.

a) Wir können 3 aus 6 freie Plätze auswählen ohne Reihenfolge. Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

b) Hier kommt es auch noch darauf an, in welcher Reihenfolge sich die Schüler auf die Plätze zwischen den freien setzen. Anzahl der Möglichkeiten:

$$20 \cdot 3! = 120$$

A-30.4. Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten: $\frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$

A-30.5. Die Reihenfolge der Zahlen ist belanglos, keine Wiederholungen beim Ziehen ohne Zurücklegen. Anzahl der Möglichkeiten für „4 Richtige":

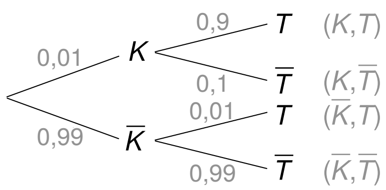
$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4.845$$

31 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

31.1 Lösungen

A-31.1.

a) Baumdiagramm und 4-Felder-Tafel:

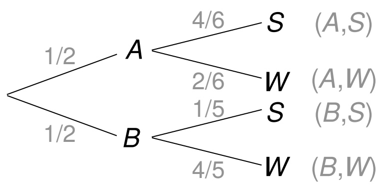


	K	$\overline{K}$	$\sum$
T	0,009	0,0099	0,0189
$\overline{T}$	0,001	0,9801	0,9811
$\sum$	0,01	0,99	1

z.B. $P(T) = 0{,}01 \cdot 0{,}9 + 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0189$

b) $P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}009}{0{,}0189} \approx 0{,}4762 = 47{,}62\%$

A-31.2. Wir zeichnen zunächst ein Baumdiagramm und stellen die 4-Felder-Tafel auf:



	A	B	$\sum$
S	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{13}{30}$
W	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{17}{30}$
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

a) $P_W(A) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{30}} = \frac{5}{17} \approx 0{,}29 = 29\%$

b) $P_W(B) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{17}{30}} = \frac{12}{17} \approx 0{,}71 = 71\%$

32 Diskrete Verteilungen

32.1 Lösungen

A-32.1. Binomialverteilung für X = Anzahl der defekten Schrauben.

a) Genau 4 defekte Schrauben:

$$B(20; 0,03; 4) = P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}03^4 \cdot 0{,}97^{16} \approx 0{,}0024 = 0{,}24\%$$

b) Höchstens 2 defekte Schrauben:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0{,}03^0 \cdot 0{,}97^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}03^1 \cdot 0{,}97^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{18} \\ &\approx 0{,}5438 + 0{,}3364 + 0{,}0988 = 0{,}9790 = 97{,}9\% \end{aligned}$$

A-32.2. Binomialverteilung mit $n = 5, p = 5/8$:

a) $E(X) = \mu = 5 \cdot \frac{5}{8} = 3{,}125$, $\sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8}} \approx 1{,}083$

b)
- $P(X = 1) = B\left(5; \frac{5}{8}; 1\right) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 \approx 0{,}0618$
- $P(X = 3) = B\left(5; \frac{5}{8}; 3\right) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \approx 0{,}3433$
- $P(X = 5) = B\left(5; \frac{5}{8}; 5\right) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^0 \approx 0{,}0954$

A-32.3. Binomialverteilung mit $n = 100, p = 0{,}2$:

a) mindestens 15 weiße Kugeln:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - F(100; 0{,}2; 14) \approx 1 - 0{,}0804 = 0{,}9196 = 91{,}96\%$$

b) höchstens 20 weiße Kugeln:

$$P(X \leq 20) = F(100; 0{,}2; 20) \approx 0{,}5595 = 55{,}95\%$$

c) mehr als 20 aber weniger als 30 weiße Kugeln:

$$\begin{aligned} P(20 < X < 30) &= P(X \leq 29) - P(X \leq 20) = F(100; 0{,}2; 29) - F(100; 0{,}2; 20) \\ &\approx 0{,}9888 - 0{,}5595 = 0{,}4293 = 42{,}93\% \end{aligned}$$

A-32.4. Angenommen, die Anzahl gedruckter Briefmarken ist so groß, dass statt der hypergeometrischen Verteilung die Binomialverteilung (mit $p = 0{,}1$ und unbekanntem n) angewandt werden kann.

$$\begin{array}{rrcl} & P(X \geq 1) & = & 1 - P(X = 0) \\ \Leftrightarrow & 0{,}1 & \geq & 0{,}99^n \\ \Leftrightarrow & n & \geq & 230 \end{array}$$

A-32.5. Angenommen, die Trefferwahrscheinlichkeit wäre bei jedem Elfer $p = 0{,}8$, so dass dass die Binomialverteilung angewandt werden kann:

a) „Mindestens 1 Fehlschuss" bei n Versuchen bedeutet, dass „nicht alles Treffer" sind:

$$\begin{array}{rrcl} & 1 - P(X = n) & \geq & 0{,}95 \\ \Leftrightarrow & 1 - 0{,}8^n & \geq & 0{,}95 \\ \Leftrightarrow & 0{,}05 & \geq & 0{,}8^n \\ \Leftrightarrow & n & \geq & 14 \end{array}$$

b) $P(X = 5) = B(5; p; 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^0 = 0{,}8 \Leftrightarrow p \approx 0{,}96$

A-32.6. Binomialverteilung mit $n = 12, p = 0{,}5, X =$ Anzahl von Wappen

a) Erwartungswert: $E(X) = 12 \cdot 0{,}5 = 6$

b) $P(X = 6) = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^6 \cdot (1 - 0{,}5)^6 \approx 0{,}226 = 22{,}6\%$

c) $P(5 \leq X \leq 7) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^{12} + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^{12} + \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^{12} \approx 0{,}612 = 61{,}2\%$

A-32.7. Hypergeometrisch mit $N = 49, M = 6, n = 6, k = 5$:

$$P(X = 5) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 49 - 6 \\ 6 - 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{6 \cdot 43}{13.983.816} \approx 0{,}000018$$

33 Stetige Verteilungen

33.1 Lösungen

A-33.1. Tabellenwerte:

a) $\Phi(0{,}51) \approx 0{,}69497$

b) $\Phi(0{,}04) \approx 0{,}51595$

c) $\Phi(-2{,}3) \approx 1 - \Phi(2{,}3) = 1 - 0{,}98928 = 0{,}01072$

A-33.2.

a) $P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 1 - \Phi\left(\frac{35-30}{5}\right) \approx 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$

b) $P(20 \leq X \leq 35) = \Phi(1) - \Phi(-2) \approx 0{,}84134 - (1 - 0{,}97725) = 0{,}81859$

c) $P(X \leq k) = 0{,}99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-30}{5}\right) = 0{,}99 \Rightarrow \frac{k-30}{5} = 2{,}33 \Rightarrow k = 41{,}65$ kg

A-33.3.

a) $P(X \leq 48) = \Phi\left(\frac{48-52}{2}\right) = \Phi(-2) \approx 1 - 0{,}97725 = \Phi(2) = 0{,}02275$

b) $P(X > 57) = 1 - P(X \leq 57) = 1 - \Phi\left(\frac{57-52}{2}\right) \approx 1 - 0{,}99379 = 0{,}00621$

c) $P(49 \leq X \leq 55) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) \approx 0{,}93319 - (1 - 0{,}93319) = 0{,}86638$

d) $P(X > k) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{k-52}{2} = -1{,}28 \Rightarrow k = 53{,}28$ cm

A-33.4. Wir prüfen, ob die die Laplace-Bedingung erfüllt ist: $\sigma^2 > 9$ oder äquivalent $\sigma > 3$. Falls dies der Fall ist, so kann mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden.

a) $n = 100, p = 0{,}6 : \sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} \approx 4{,}90 > 3$ ✓

b) $n = 10, p = \frac{1}{6} : \sigma \approx 1{,}18 < 3$ ↯

c) $n = 50, p = \frac{1}{3} : \sigma \approx 3{,}33 > 3$ ✓

Bei Teilaufgabe b) ist eine Approximation mit Hilfe der Normalverteilung nicht erlaubt, da die Faustregel nicht erfüllt ist. Es wird nun das n gesucht, für das die Faustregel erfüllt ist! Es muss $\sigma > 3$ gelten, dann folgt:

$$\sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} > 3 \Rightarrow n > 64{,}8 \Rightarrow n = 65$$

34 Hypothesentests

34.1 Lösungen

A-34.1.

- Aus dem Text können wir folgende Parameter entnehmen: $n = 200$ und $p = 0{,}35$
- Nullhypothese: $H_0 : p = 0{,}35$, denn die Nullhypothese ist die Aussage, die schon vorher gilt und jetzt widerlegt werden soll. In der Aufgabe steht dazu: Es kommen 35% der Schüler zur Lutherschule.
  Gegenhypothese: $H_1 : p \geq 0{,}35$, denn die Gegenhypothese ist die Aussage, die gezeigt werden soll. Im Aufgabenkontext: Es kommen mehr als 35% zu der Schule, weil die Schule ja beliebter geworden sei.
- Der Fehler 1. Art tritt auf, wenn nach wie vor 35% zur Lutherschule kommen, diese Hypothese (H_0) aber trotzdem verworfen wird, weil mehr der befragten Eltern die Lutherschule wählen.
- Mit dem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ folgt:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & P(X \geq k) & \leq & 0{,}05 & \\
\Leftrightarrow & 1 - P(X \leq k-1) & \leq & 0{,}05 & \mid + P(X \leq k-1), -0{,}05 \\
\Leftrightarrow & 0{,}95 & \leq & P(X \leq k-1) & \\
\Leftrightarrow & 0{,}95 & \leq & F(200; 0{,}35; k-1) & \\
\Leftrightarrow & 0{,}95 & \leq & F(200; 0{,}35; 80) = 0{,}93911 & ↯ \\
\Leftrightarrow & 0{,}95 & \leq & F(200; 0{,}35; \underbrace{81}_{=k-1}) = 0{,}95473 & \checkmark
\end{array}
$$

  Der Annahmebereich ist also $A = \{0, 1, \ldots, 81\}$ und der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{82, 83, \ldots, 200\}$, jeweils für die Nullhypothese H_0.

A-34.2. Wir stellen die Hypothesen anhand der Aufgabenstellung auf. Es liegt ein rechtsseitiger Hypothesentest vor, so dass gilt:

- Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0{,}1$
- Alternativhypothese: $H_1 : p > 0{,}1$

Es werden 100 Spieler befragt und damit wissen wir das $n = 100$ ist. Auch das Signifikanzniveau ist mit $\alpha = 0{,}05$ gegeben. Wir suchen jetzt also wieder einen kritischen Wert in der entsprechenden $F-$Tabelle der kumulierten Binomialverteilung (oder mit Hilfe des Taschenrechners):

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &\leq 0{,}05 \\ \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k-1) &\leq 0{,}05 \\ \Leftrightarrow \quad 0{,}95 &\leq P(X \leq k-1) \end{aligned}$$

Die Ausgabe des Taschenrechners liefert an dieser Stelle

X	$binomcdf(100, 0.1, X)$
14	0,9274
15	**0,9601**
16	0,9794
17	0,9900

Bei $X = 15$ ist der Wert zum ersten Mal größer als 0,95. **Achtung**: Aufgrund von $k-1 = 15 \Leftrightarrow k = 16$ liegt unser gesuchter bei 16! Ab 16 Leuten können die Spielhersteller also fast sicher sein ein neues Spiel zu entwickeln. Daraus folgt:

- Annahmebereich $A = \{0, \dots, 15\} \rightarrow H_0$ stimmt, denn weniger wollen das Spiel
- Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{16, \dots, 100\} \rightarrow H_0$ stimmt nicht zu 5% und die Alternativhypothese trifft ab 16 Spielern zu

A-34.3.

- Für jeden Freiwurf wird dieselbe Trefferwahrscheinlichkeit p unterstellt, so dass die Zufallsvariable X = Trefferzahl binomialverteilt ist.
- Nullhypothese H_0: Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = 0{,}9$. Die Gegenhypothese ist dann $p < 0{,}9$.
- Gegen H_0 spricht nur eine zu geringe Trefferzahl, so dass nur einseitig zu testen ist.
- Für das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ besteht der Ablehnungsbereich für H_0 aus allen Trefferzahlen $\leq b$ für eine Zahl b mit $P(X \leq b) \leq 0{,}05$ unter der Annahme H_0 .
- Wegen $P(X \leq 23) \approx 0{,}026$ und $P(X \leq 24) \approx 0{,}073$ mit $p = 0{,}9$ ist die Nullhypothese für Trefferzahlen bis 23 abzulehnen und ab 24 Treffern anzunehmen.

A-34.4.

- Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}08$ als Wahrscheinlichkeit für Ausschuss. Die Gegenhypothese lautet: $p \neq 0{,}08$

- Unter der Annahme, H_0 sei wahr, ist X binomialverteilt mit:

$$\mu = 500 \cdot 0{,}08 = 40 \text{ und } \sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = \sqrt{36{,}8}$$

  Zur Approximation dient die (μ, σ) -Normalverteilung.

- Nach Aufgabentext ist zweiseitig zu testen. Der Annahmebereich für H_0 besteht bei $\alpha = 0{,}05$ aus dem Intervall, in dem die Zufallsvariable X = Anzahl der Ausschussteile ihre Werte mit 95% Wahrscheinlichkeit annimmt. Dies gilt für:

$$40 - 1{,}96 \cdot \sqrt{36{,}8} \approx 28{,}1 \leq X \leq 40 + 1{,}96 \cdot \sqrt{36{,}8} \approx 51{,}9$$

  ganzzahlig gerundet: $28 \leq x \leq 52$. Bei diesen Anzahlen von Ausschussteilen in der Stichprobe wird die Nullhypothese angenommen.

35 Aufgaben auf Abiturniveau

Aufgabe: „Kunststoffteile“

1.

a) Es handelt sich um eine binomialtverteilte Zufallsgröße mit $n = 50$ und $p = 0{,}04$. Daraus folgt für die beiden Ereignisse:

- A: Entweder im Taschenrechner berechnen oder in der nicht kumulativen Tabelle nachschauen!

$$P(A) = B(50; 0{,}04; 2) = P_{0{,}04}^{50}(X = 2) = 0{,}27623 \approx 27{,}6\%$$

- B: Umformen nach Gegenereignis und entweder im Taschenrechner berechnen oder in der kumulativen Tabelle nachschauen!

$$P(B) = P_{0{,}04}^{50}(X \geq 3) = 1 - P_{0{,}04}^{50}(X \leq 2) = 1 - 0{,}67671 \approx 32{,}3\%$$

b) Es handelt sich um einen Signifikanztest, bei dem die Nullhypothese mit $H_0 : p \geq 0{,}04$ vorgegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, gegen H_0 zu sein, obwohl H_0 stimmt, soll höchstens 5% betragen. Lösungsansatz:

$$P_{0{,}04}^{200}(X \leq k) \leq 0{,}05 \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=0}^{k} B(200; 0{,}04; i) \leq 0{,}05$$

Entscheidungsregel:

	gegen H_0 bei 0 bis k fehlerhaften Teilen	für H_0 bei $k + 1$ bis 200 fehlerhaften Teilen
$p \geq 0{,}04$	$\leq 5\%$	

Nachschlagen in der kumulativen Tabelle ergibt für das größtmögliche k: $k \leq 3$.
Man entscheidet sich gegen die Nullhypothese, wenn von 200 Teilen höchstens 3 fehlerhaft sind.

c) Die Nullhypothese „Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4%“ stellt die für das Unternehmen schlimmste Situation dar: Der Wechsel zum teureren Granulat hat keine Reduzierung der fehlerhaften Teile gebracht. Entscheidet sich das Unternehmen aufgrund des Tests gegen diese Nullhypothese, so glaubt das Unternehmen, es gäbe weniger fehlerhafte Teile, obwohl deren Quote mindestens 4% beträgt. Diese Wahrscheinlichkeit – aufgrund des Tests irrtümlich an eine Reduzierung (gegen H_0) zu glauben – soll möglichst niedrig (hier: $\leq$ 5%) gehalten werden.

2. Wir erweitern zunächst die Tabelle:

Farbe	blau	rot	grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°
Wahrscheinlichkeit	$\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$	$\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$	$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$

a) Die drei verschiedenen Farben lassen sich auf 3! = 3 · 2 · 1 = 6 Arten anordnen. Damit ergibt sich:

$$P(\text{3 versch. Farben}) = 3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

b) Der Erwartungswert der Auszahlung bei einem Spiel soll also gleich dem Einsatz sein. x sei die Auszahlung bei drei verschiedenen Farben.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \tfrac{1}{6} \cdot 10\text{ Euro} + \tfrac{1}{6} \cdot X + \tfrac{4}{6} \cdot 0\text{ Euro} &= 5\text{ Euro} \\
\Leftrightarrow \quad 10\text{ Euro} + X &= 30\text{ Euro} \\
\Leftrightarrow \quad X &= 20\text{ Euro}
\end{aligned}$$

Alternativ: Das Spiel soll „fair“ sein, der Erwartungswert des Gewinns also null betragen. X sei die Auszahlung bei drei verschiedenen Farben.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \tfrac{1}{6} \cdot (10\text{ Euro} - 5\text{ Euro}) + \tfrac{1}{6} \cdot (X - 5\text{ Euro}) + \tfrac{4}{6} \cdot (0\text{ Euro} - 5\text{ Euro}) &= 0\text{ Euro} \quad | \cdot 6 \\
\Leftrightarrow \quad 5\text{ Euro} + (X - 5\text{ Euro}) + 4 \cdot (-5\text{ Euro}) &= 0\text{ Euro} \\
\Leftrightarrow \quad 5\text{ Euro} + X - 5\text{ Euro} - 20\text{ Euro} &= 0\text{ Euro} \\
\Leftrightarrow \quad X &= 20\text{ Euro}
\end{aligned}$$

c) Ist α der Mittelpunktswinkel des grünen Sektors nach der Änderung, so gilt:

Farbe	blau	rot	grün
Mittelpunktswinkel	$360° - 3\alpha$	2α	α
Wahrscheinlichkeit	$1 - \frac{3\alpha}{360°} = 1 - 3p$	$\frac{2\alpha}{360°} = 2p$	$\frac{\alpha}{360°} = p$

Die gegebene Pfadwahrscheinlichkeit fordert:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad P(R) \cdot P(B) &= 0{,}14 \\
\Rightarrow \quad 2p \cdot (1 - 3p) &= 0{,}14 \\
\Leftrightarrow \quad 2p - 6p^2 - 0{,}14 &= 0 \quad | : (-2) \\
\Leftrightarrow \quad 3p^2 - p + 0{,}07 &= 0 \quad | \; abc - \text{ oder } pq - \text{Formel}
\end{aligned}$$

Die Lösung beträgt $p_1 = \frac{1{,}4}{6} > \frac{1}{6}$ und $p_2 = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1$. p_1 kommt wegen der Forderung „der grüne Sektor wird verkleinert“ nicht infrage. Für den Mittelpunktswinkel des grünen Sektors erhalten wir daher:

$$\frac{\alpha}{360°} = 0{,}01 \Leftrightarrow \alpha = 36°$$