StudyHelp

StudyHelp

Mathe ABI mit MatheMind

Lösungen zum Lernheft

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autoren: Johannes Mensing und Josef Naber
Konzept & Lernvideos: MatheMind

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

I Lösungen 5

A Analysis . . . 7

A.1 zu Ableitung . . . 7
A.2 zu Tangente & Normale . . . 13
A.3 zu Steigungs- & Schnittwinkel . . . 16
A.4 zu Symmetrie, Schnittpunkte, Monotonie & Globalverhalten . . . 18
A.5 zu Extrempunkte . . . 20
A.6 zu Wendepunkte . . . 27
A.7 zu *e*-Funktion & ln-Funktion . . . 32
A.8 zu Lineare Gleichungssysteme . . . 36
A.9 zu Steckbriefaufgaben . . . 39
A.10 zu Extremwertprobleme . . . 45
A.11 zu Exponentielle Wachstumsprozesse . . . 52
A.12 zu Integralrechnung & Rotationskörper . . . 55
A.13 zu Funktions-/Kurvenscharen . . . 61

B Lineare Algebra . . . 67

B.1 zu Geraden im Raum . . . 67
B.2 zu Orthogonalität & Skalarprodukt . . . 71
B.3 zu Winkel . . . 74
B.4 zu Ebenen im Raum . . . 77
B.5 zu Ebenen – Spurpunkte und Formumwandlung . . . 80
B.6 zu Ebenen – Lagebeziehungen . . . 84
B.7 zu Abstände . . . 88

C Stochastik . . . 93

C.1 zu Zufallsexperimente . . . 93
C.2 zu Baumdiagramme . . . 96
C.3 zu Kombinatorik . . . 101
C.4 zu Bedingte Wahrscheinlichkeit & Unabhängigkeit . . . 103
C.5 zu Zufallsvariablen und Verteilungen . . . 108
C.6 zu Bernoulli- und Binomialverteilung . . . 110

C.7 **zu Hypergeometrische Verteilung** **113**
C.8 **zu Spezielle stetige Verteilungen (Normalverteilung)** **116**
C.9 **zu Sigma-Regeln** **118**
C.10 **zu Hypothesentest** **119**
C.11 **zu Matrizen & Austauschprozesse** **126**

Teil I

Lösungen

A Analysis

A.1 zu Ableitung

zu Aufgabe 1: Berechne die mittlere Änderungsrate von f auf dem angegebenen Intervall D.

a) $f(x) = 3x - 3, D = [0; 1]$

$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(3 \cdot (1) - 3) - (3 \cdot (0) - 3)}{1} = \frac{0 + 3}{1} = 3$$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2, D = [1; 4]$

$$m = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\left(-\frac{1}{4} \cdot (4)^2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (1)^2\right)}{3} = \frac{-4 + \frac{1}{4}}{3} = \frac{\left(-\frac{15}{4}\right)}{3} = -\frac{5}{4}$$

c) $f(x) = 3x^2 - 5x, D = [-1; 1]$

$$m = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{3 \cdot (1)^2 - 5 \cdot (1) - \left(3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1)\right)}{2} = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

zu Aufgabe 2: Wir betrachten das Diagramm und beantworten die Fragen:

a) Beschreibe, wie die Fahrt abläuft. Was gibt die Steigung des Graphen an einer bestimmten Stelle an?

- In der ersten Stunde fährt das Auto mit einer Geschwindigkeit von (100km/h), z.B. auf der Landstraße.
- In den folgenden zwei Stunden fährt das Auto mit einer Geschwindigkeit von 50km/h, z.B. in der Stadt.
- In der folgenden Stunde fährt das Auto mit einer sehr hohen Geschwindigkeit von 150km/h, z.B. auf der Autobahn.
- Anschließend steht das Auto für eine Stunde still, z.B. Stau oder Pause.
- In der letzten Stunde fährt das Auto mit einer Geschwindigkeit von 100km/h, z.B. auf der Landstraße.
- Die Steigung an einer bestimmten Stelle gibt die momentane Veränderung der Strecke zu dem Zeitpunkt an, also nichts anderes als die Geschwindigkeit.

b) Wie schnell fährt das Auto in den ersten drei Stunden durchschnittlich?

Mit dem Differenzenquotienten:
Im Intervall von $[0;3]$ starten wir beim Wert 0 (km) und enden beim Wert 200 (km).

$$m = \frac{200-0}{3-0} = 66{,}\overline{66}\ (\text{km}/\text{h})$$

Durch logisches Denken:
Wenn wir in 3 Stunden 200 Kilometer zurücklegen, dann legen wir im Schnitt

$$\frac{200\ \text{km}}{3\ \text{h}} = 66{,}\overline{66}\ \text{km}/\text{h zurück.}$$

A.: Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also $66{,}\overline{66}$ km/h.

c) Wie schnell fährt das Auto durchschnittlich in den gesamten sechs Stunden?

Mit dem Differenzenquotienten:
Im Intervall von $[0;6]$ starten wir beim Wert 0 (km) und enden beim Wert 450 (km).

$$m = \frac{450-0}{6-0} = 75\ (\text{km}/\text{h})$$

Durch logisches Denken:
Wenn wir in 6 Stunden 450 Kilometer zurücklegen, dann legen wir im Schnitt

$$\frac{450\ \text{km}}{6\ \text{h}} = 75\ \text{km}/\text{h zurück.}$$

A.: Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also 75 km/h.

d) Was bedeutet die Steigung an der Stelle $t = 0{,}5$ im Sachkontext und wie groß ist dieser Wert?

Da das Auto in der ersten Stunde konstant mit der gleichen Geschwindigkeit fährt, können wir die durchschnittliche Geschwindigkeit in diesem Intervall berechnen und haben dadurch auch die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ herausgefunden.

$$m = \frac{100-0}{1-0} = 100\ \text{km}/\text{h} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{50-0}{0{,}5-0} = 100\ \text{km}/\text{h}$$

Das bedeutet, dass das Auto eine halbe Stunde nach Abfahrt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h unterwegs ist.

e) Wann hat das Auto die größte bzw. kleinste Geschwindigkeit?

- Dort, wo der Graph am stärksten steigt, ist die Geschwindigkeit am größten und dort, wo er am schwächsten steigt, am geringsten.
- Zwischen der dritten und vierten Stunde ist die Geschwindigkeit am größten, zwischen der vierten und fünften am geringsten.

zu Aufgabe 3: Skizziere den Graphen von f' in ein Koordinatensystem.

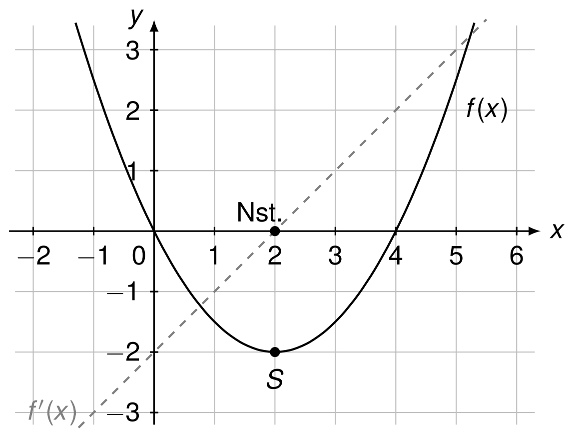
Wichtig bei dieser Aufgabe ist es, sich klarzumachen, dass der ***y*-Wert** der Ableitung die Steigung der ursprünglichen Funktion angibt. Das bedeutet:

- Starke Steigung von f $\rightarrow$ Großer y-Wert bei f'
- Schwache Steigung von f $\rightarrow$ Kleiner y-Wert bei f'

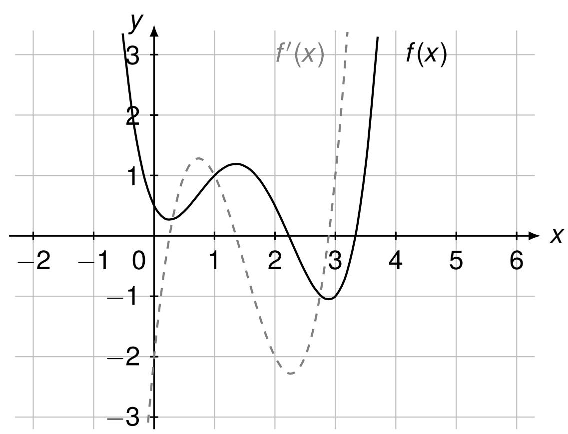
- Starke Abnahme von $f \rightarrow$ Großer negativer y-Wert bei f'
- Schwache Abnahme von $f \rightarrow$ Kleiner negativer y-Wert bei f'

Zudem sollte man im Kopf haben, dass die Ableitung immer einen Grad niedriger als die ursprüngliche Funktion ist. Eine Funktion zweiten Grades (Parabel) wird also abgeleitet zu einer Funktion ersten Grades (Lineare Funktion).

a) Die Parabel fällt erst stark und dann immer schwächer, bis sie schließlich kurzzeitig keine Steigung hat, bevor sie danach erst langsam und dann immer stärker steigt.



b) Die Funktion fällt erst stark, dann aber schwächer, bevor sich die Steigung ins Positive umkehrt. Dort steigt der Graph erst schwach, dann stärker, dann wieder schwach und ändert dann erneut seine Steigung zu einer schwachen negativen Steigung. Nach kurzer Zeit ändert sich die Steigung erneut ins Positive, wo der Graph sehr stark steigt.



zu Aufgabe 4: Bestimme die Ableitungsfunktion.

a) $f'(x) = 4x^3$

b) $f'(x) = -3n \cdot x^{3n-1}$

c) $f'(x) = 14x^6$

d) $f'(x) = 1$

e) $f'(x) = (n-2) \cdot x^{n-3}$

f) $f'(x) = -x^3$

g) $f'(x) = 2022 \cdot x^{2021}$

h) $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x$

i) $f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$

j) $f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{x}}$

k) $f'(x) = \frac{1}{10}$

l) $f'(x) = 0$

m) $f'(x) = 3ax^2$

n) $f'(x) = -n \cdot ax^{n-1}$

o) $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 2x$

p) $f'(x) = -4x^3 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 1$

q) $f'(x) = -(-2) \cdot x^{-3} + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

zu Aufgabe 5: Bestimme die Ableitung der Funktionen.

a) $f(x) = \left(1 + 2x^2\right)^3$

Kettenregel: $f'(x) = 4x \cdot 3 \cdot \left(1 + 2x^2\right)^2 = 12x \cdot \left(1 + 2x^2\right)^2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-3x}$

Quotientenregel: $$f'(x) = \frac{2x \cdot \left(x^2 - 3x\right) - (2x - 3) \cdot x^2}{\left(x^2 - 3x\right)^2} = -\frac{3x^2}{x^4 - 6x^3 + 9x^2} = -\frac{3}{(x - 3)^2}$$

c) $f(x) = \left(4x^2 + 1\right) \cdot \left(x^3 - 2x\right)$

Produktregel: $f'(x) = 8x \cdot \left(x^3 - 2x\right) + \left(3x^2 - 2\right) \cdot \left(4x^2 + 1\right)$

$= 8x^4 - 16x^2 + 12x^4 + 3x^2 - 8x^2 - 2 = 20x^4 - 21x^2 - 2$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$

Kettenregel: $$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

e) $f(x) = x^4 \cdot x^{11} = x^{15} \rightarrow f'(x) = 15x^{14}$

f) $f(x) = \sin\left(3x^4\right)$

Kettenregel: $f'(x) = 12x^3 \cdot \cos\left(3x^4\right)$

g) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x \rightarrow f'(x) = 1$

h) $f(x) = 2e^{3x} \cdot \left(3x^2 - x\right)$

Produktregel: $f'(x) = 6e^{3x} \cdot \left(3x^2 - x\right) + (6x - 1) \cdot 2e^{3x} = 2e^{3x} \cdot 3 \cdot \left(3x^2 - x\right) + 2e^{3x} \cdot (6x - 1)$

$= 2e^{3x} \cdot \left(9x^2 - 3x\right) + 2e^{3x} \cdot (6x - 1) = 2e^{3x} \cdot \left(9x^2 - 3x + 6x - 1\right)$

$= 2e^{3x} \cdot \left(9x^2 + 3x - 1\right)$

i) $f(x) = e^{e^x}$

Kettenregel: $f'(x) = e^x \cdot e^{e^x} = e^{e^x + x}$

j) $f(x) = e^{-x} \cdot \left(-x^2 + 3\right)$

Produktregel: $f'(x) = -e^{-x} \cdot \left(-x^2 + 3\right) - 2x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right)$

zu Aufgabe 6: Bei einem Pferderennen kann die zurückgelegte Strecke eines Pferdes in Metern durch die Funktion $f(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 3t^2; 0 \leq t \leq 4, t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. t steht dabei für die Zeit nach dem Start in Sekunden.

a) Wie viele Meter legt das Pferd im Beobachtungszeitraum durchschnittlich pro Sekunde zurück?

Um die Frage zu beantworten, müssen wir wissen, wie viele Meter das Pferd am Ende des Beobachtungszeitraums, also nach 4 Sekunden, zurückgelegt hat.

$$\to f(4) = \frac{128}{3} \approx 42{,}67\ (\mathrm{m})$$

Nun können wir es mit dem Differenzenquotienten ausrechnen:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(\frac{128}{3}\right)}{4} \approx 10{,}67\ (\mathrm{m/s})$$

Es legt also durchschnittlich ca. 10,67 m/s zurück.

b) Berechne $f'(4)$ und interpretiere dein Ergebnis im Sachkontext.

$$f'(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 6t \to f'(4) = 20$$

Da $f(t)$ die zurückgelegte Strecke des Pferdes (nach t Sekunden) darstellt, gibt die Ableitung die Veränderung der zurückgelegten Strecke in Metern pro Sekunde an. Das ist nichts anderes als die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde.

Ein Ableitungswert von 20 bedeutet also, dass das Pferd zu diesem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit von 20 m/s hat.

c) Wann erreicht das Pferd eine Geschwindigkeit von 18 km/h ?

Achtung: Die Ableitung gibt uns die Geschwindigkeit in m/s an, nicht in km/h.

Zuerst müssen also die 18 km/h in m/s umgerechnet werden:

$$\frac{18\ \mathrm{km/h}}{3{,}6} = 5\ \mathrm{m/s}$$

Nun kann man die Ableitung gleich diesem Wert setzen:

$$\begin{array}{rrcll}
 & f'(t) & = & 5 & \\
\Leftrightarrow & -\frac{1}{4}t^2 + 6t & = & 5 & \mid -5 \\
\Leftrightarrow & -\frac{1}{4}t^2 + 6t - 5 & = & 0 & \mid \cdot(-4) \\
\Leftrightarrow & t^2 - 24t + 20 & = & 0 & \mid pq - \text{Formel} \\
\Leftrightarrow & t_1 \approx 0{,}8645 & & t_2 \approx 23{,}1355 &
\end{array}$$

Da $t_2 \approx 23{,}1355$ außerhalb des Definitionsbereiches liegt, ist $t_1 \approx 0{,}8645$ die Lösung. Nach ca. 0,8645 Sekunden hat das Pferd also eine Geschwindigkeit von 18 km/h (5 m/s).

d) Warum macht es im Sachkontext keinen Sinn, dass die Ableitung einen negativen Wert annimmt?

Ein negativer Ableitungswert würde bedeuten, dass die ursprüngliche Funktion $f(t)$ fällt. Übertragen würde das heißen, dass die zurückgelegte Strecke abnimmt, was aber keinen Sinn macht, da die zurückgelegte Strecke nicht abnehmen kann, sondern höchstens gleichbleiben, wenn sich das Pferd nicht vom Fleck bewegt. Selbst wenn es rückwärtslaufen würde, dann würde immer noch Strecke zurückgelegt werden, nur in eine andere Richtung.

zu Aufgabe 7: Eine besondere Pflanzenart wird in die Wüste gepflanzt und muss in den ersten 3 Monaten ständig mit Wasser versorgt werden. Dazu wird eine automatische Bewässerungsanlage installiert. Ihre abgegebene Wassermenge in Litern kann für einen bestimmten Tag durch die Funktion $f(t)$ beschrieben werden. t gibt dabei die Zeit in Stunden nach Messbeginn an. Die Messung beginnt um 11Uhr.

a) Wie viel Wasser wird von 12 bis 14 Uhr durchschnittlich pro Stunde verbraucht?

   Achtung: 12 Uhr entspricht einem Wert von $t = 1$ und 14 Uhr einem Wert von $t = 3$, da die Messung ja um 11 Uhr beginnt und 11 Uhr deshalb durch $t = 0$ beschrieben wird.

   Um diese Frage beantworten, brauchen wir den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \approx \frac{7{,}3178 - 0{,}5223}{2} \approx 3{,}3977$$

   Das heißt zwischen 12 und 14 Uhr werden pro Stunde durchschnittlich ca. 3,3977 Liter Wasser verbraucht.

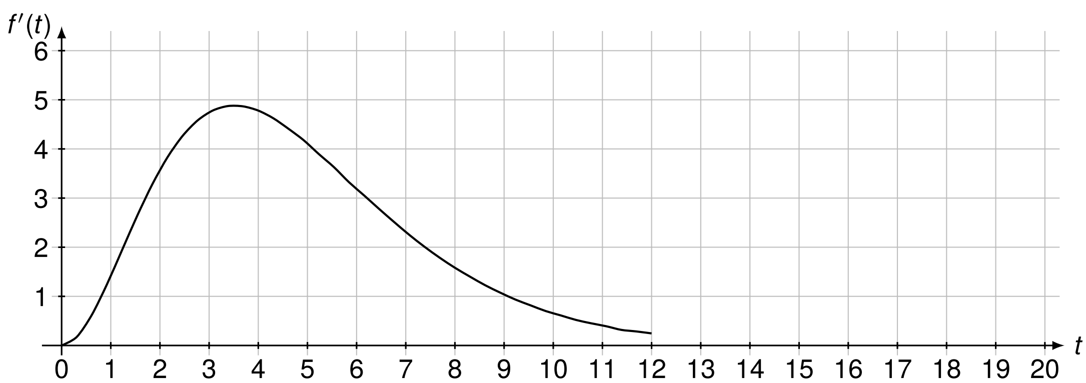
b) Was sagt die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus? Interpretiere ihren Verlauf im Sachkontext.

   Da $f(t)$ die abgegeben Wassermenge in Litern beschreibt, gibt die Ableitung die Veränderung dieser Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt an. Das ist nichts anderes als die aktuelle Zuflussmenge des Wassers in Litern/Stunde.

   Um den Verlauf der Ableitung zu interpretieren, müssen wir sie erst (mit der Produktregel) bilden und dann zeichnen:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{1}{12}e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left(12t^3 + 72t^2 + 192t + 256\right) + \left(36t^2 + 144t + 192\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}e^{-\frac{3}{4}t}\right) \\
&= e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(12t^3 + 72t^2 + 192t + 256\right) + e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(36t^2 + 144t + 192\right) \\
&= e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left(t^3 + 6t^2 + 16t + \frac{64}{3}\right) + e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left(-4t^2 - 16t - \frac{64}{3}\right) \\
&= e^{-\frac{3}{4}t} \cdot \left(t^3 + 2t^2\right)
\end{aligned}$$

   Skizze:



   Ab 11 Uhr scheint der Bedarf an Wasser deutlich zu steigen, weshalb die Zuflussmenge bis rund 14:30 Uhr stark erhöht wird. Ab 14:30 Uhr scheint der Bedarf an Wasser wieder langsam abzunehmen, was sich an der abnehmenden Zuflussmenge bemerkbar macht.

Zurückzuführen könnte das auf den Stand der Sonne sein. Um ca. 14.30 stand die Sonne vermutlich am höchsten, weshalb viel Wasser benötigt wurde und in der Nacht wurde kaum Wasser benötigt, da die Sonne dann nicht scheint.

c) Interpretiere den Wert, den die Ableitung zu einer Zeit von 2 Uhr nachts annimmt im Sachkontext.

Achtung: 2 Uhr nachts entspricht einem t-Wert von 15.

$$f'(15) \approx 0{,}0498$$

Um 2 Uhr nachts liegt die Zuflussmenge bei rund 0,0498 Litern/Stunde. Wie schon erwähnt ist dies vermutlich auf den Stand der Sonne zurückzuführen.

A.2 zu Tangente & Normale

zu Aufgabe 8: Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = -3x^2 + x, x_0 = -2$
Wir berechnen: $f(x = x_0) = -3 \cdot (-2)^2 + (-2) = -14$ und $f'(x) = -6x + 1$

- Tangente:
  1. m_t berechnen: $m_t = f'(-2) = -6 \cdot (-2) + 1 = 13$
  2. b_t herausfinden: $-14 = 13 \cdot (-2) + b_t \Leftrightarrow 12 = b_t$

  Tangentengleichung: $t(x) = 13x + 12$
- Normale:
  1. m_n berechnen: $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{(13)} = -\dfrac{1}{13}$
  2. b_n herausfinden: $-14 = -\frac{1}{13} \cdot (-2) + b_n \Leftrightarrow -\frac{184}{13} = b_n$

  Normalengleichung: $n(x) = -\dfrac{1}{13}x - \dfrac{184}{13}$

b) $f(x) = x^3, x_0 = 0$
Wir berechnen: $f(x = x_0) = 0$ und $f'(x) = 3x^2$

- Tangente:
  1. m_t berechnen: $m_t = f'(0) = 3 \cdot (0)^2 = 0$
  2. b_t herausfinden: $0 = 0 \cdot (0) + b_t \Leftrightarrow 0 = b_t$

  Tangentengleichung: $t(x) = 0$
- Normale:
  1. m_n berechnen: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{0}$ ↯
  2. b_n herausfinden: nicht möglich, da m_n schon nicht möglich war zu berechnen

  Es gibt keine Normalengleichung. Diese müsste senkrecht an der y-Achse hochgehen.

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 1$
Wir berechnen: $f(x = x_0) = \frac{1}{(1)^2} = 1$ und $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

- Tangente:
  1. m_t berechnen: $m_t = f'(1) = -\frac{2}{(1)^3} = -2$
  2. b_t herausfinden: $1 = -2 \cdot (1) + b_t \Leftrightarrow 3 = b_t$

  Tangentengleichung: $t(x) = -2x + 3$
- Normale:
  1. m_n berechnen: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$
  2. b_n herausfinden: $1 = \frac{1}{2} \cdot (1) + b_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} = b_n$

  Normalengleichung: $n(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

d) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 2$
Wir berechnen: $f(x = x_0) = \sqrt{2}$ und $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

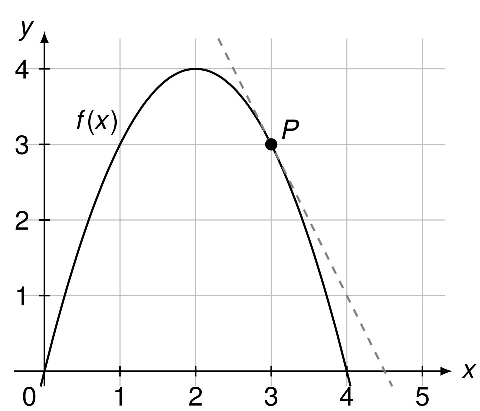
- Tangente:
  1. m_t berechnen: $m_t = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
  2. b_t herausfinden: $\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (2) + b_t \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = b_t$

  Tangentengleichung: $t(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Normale:
  1. m_n berechnen: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = -2\sqrt{2}$
  2. b_n herausfinden: $\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \cdot (2) + b_n \Leftrightarrow 5\sqrt{2} = b_n$

  Normalengleichung: $n(x) = -2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$

zu Aufgabe 9: Ein Produktionsband kann mit der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$ für $0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Am Punkt $P(3 \mid 3)$ werden die Produkte auf ihre Qualität überprüft. Sind sie gut, bleiben sie auf dem Produktionsband. Sind sie fehlerhaft, werden sie von diesem Punkt auf ein geradliniges Band geleitet, dass genau die Steigung des Produktionsbandes in diesem Punkt besitzt.

a) Fertige eine Skizze der Situation an.



b) Der Abfallcontainer steht genau auf der x-Achse am Ende des geraden Produktionsbandes. Bestimme seine Koordinaten.

Wir müssen den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse herausfinden, denn das sind die Koordinaten des Abfallcontainers. Dazu bestimmen wir zuerst die Tangentengleichung:

$f(x) = -x^2 + 4x, P(3 \mid 3)$
Wir berechnen: $f'(x) = -2x + 4$

- Tangente:
  1. m_t berechnen: $m_t = f'(3) = -2 \cdot (3) + 4 = -2$
  2. b_t herausfinden: $3 = -2 \cdot (3) + b_t \Leftrightarrow 9 = b_t$

  Tangentengleichung: $t(x) = -2x + 9$

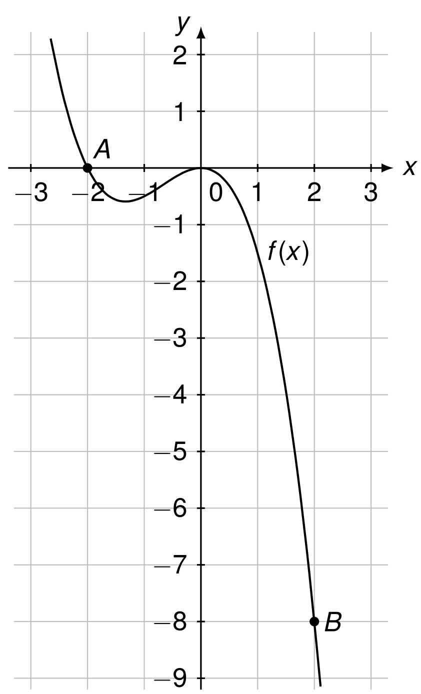
Nun bestimmen wir den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse, also die Nullstelle.

$$\begin{aligned} & -2x+9 &=& \ 0 & \mid -9 \\ \Leftrightarrow & -2x &=& -9 & \mid \div(-2) \\ \Leftrightarrow & x &=& \ 4{,}5 & \end{aligned}$$

A.: Der Containerstandpunkt lautet also $Q(4{,}5 \mid 0)$.

zu Aufgabe 10: Der Verlauf eines Flusses lässt sich näherungsweise durch die Funktion $f(x)$ beschreiben. Am Fluss liegen zwei Dörfer. Das Dorf A liegt im Punkt $A(-2 \mid 0)$ und das Dorf B am Punkt $B(2 \mid -8)$. Eine Einheit entspricht 200 Metern.

a) Fertige eine Skizze zur oben beschriebenen Situation an.



b) Die Stadt plant den Verlauf des Flusses künstlich zu verändern. Sie möchte, dass er vom Dorf B geradlinig und knickfrei in das Flussstück in der Nähe der Stadt A mündet. An welcher Stelle würde der neue Verlauf in den alten münden?

Tipp: Benutze das 2. Verfahren zum Aufstellen von Tangentengleichungen.

Wir verwenden dazu die Formel: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Für die Ableitung von f erhalten wir:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x$$

Da der neue Verlauf in Dorf B beginnen soll, liegt der Punkt $B(2 \mid -8)$ auf der Tangente und es gilt $t(x = 2) = -8$:

$$\begin{aligned} & -8 = f'(x_0) \cdot (2 - x_0) + f(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & -8 = \left(-\frac{3}{2}x_0^2 - 2x_0\right) \cdot (2 - x_0) + \left(-\frac{1}{2}x_0^2 \cdot (x_0 + 2)\right) \end{aligned}$$

Der GTR liefert: $x_0 = -2 \vee x_0 = 2$

Betrachten wir nun die Skizze zu der Situation in a), fällt die letzte Lösungen raus.

Der gesuchte Punkt, an dem der neue Verlauf in den alten Verlauf des Flusses mündet, lautet also $P(-2 \mid f(-2))$, was dem Punkt $P(-2 \mid 0)$ entspricht. Das ist genau der Punkt, an dem die Stadt A an den Fluss grenzt. Der Übergang an dieser Stelle ist knickfrei, da wir ja die Tangente an den Graphen $f(x)$ berechnet haben und somit die Steigung des Graphen und der Tangente im herausgefundenen Punkt übereinstimmen.

c) Das Ausheben des neuen Flussverlaufes kostet pro 100 Meter 50.000 Euro. Wie teuer wird das Ausheben des neuen Verlaufes werden?

Wir müssen hier die Entfernung der beiden Punkte $A(-2 \mid 0)$ und $B(2 \mid -8)$ berechnen.

Satz des Pythagoras:

$$s = \sqrt{((-2) - (2))^2 + ((0) - (-8))^2} \approx 8{,}94 \text{ [LE]}$$

Dies entspricht - da eine Längeneinheit 200 Metern entspricht - einer Gesamtstrecke von $8{,}94 \cdot 200 = 1.788{,}8$ Metern. Das Ausheben des neuen Verlaufes wird kosten:

$$50.000 \, \frac{\text{Euro}}{100 \text{ m}} \cdot 1.788{,}8 \text{ m} = 894.000 \text{ Euro}$$

A.3 zu Steigungs- & Schnittwinkel

zu Aufgabe 11: Berechne den Steigungswinkel der Geraden f.

a) $f(x) = 6x + 9 \rightarrow$ mit $m = 6$ folgt:

$$\alpha = \tan^{-1}(6) \approx 80{,}54^\circ$$

b) $f(x) = -4x - 1 \rightarrow$ mit $m = -4$ folgt:

$$\tan^{-1}(-4) \approx -75{,}96^\circ \Rightarrow \alpha \approx 180^\circ - 75{,}96^\circ = 104{,}04^\circ$$

c) f verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 1)$ und $Q(3 \mid 3)$

Da wir nur den Steigungswinkel berechnen möchten, müssen wir nicht die ganze Funktion aufstellen. Als Steigung von f ergibt sich $m = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. Dann folgt für den Steigungswinkel:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}57°$$

zu Aufgabe 12: Eine Gerade schneidet die x-Achse bei $x = -2$ und hat einen Steigungswinkel von 40°. Berechne ihre Funktionsgleichung.

- Winkel von 40° liefert die Steigung der Geraden $\Rightarrow m = \tan(40°) \approx 0{,}84$
- Gerade geht durch den Punkt $P(-2 \mid 0)$, also setzen wir den Punkt in die allgemeine Geradengleichung ein und erhalten den y-Achsenabschnitt:

$$y = m \cdot x + b \Leftrightarrow (0) = 0{,}84 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = 1{,}68$$

- Geradengleichung aufstellen: $f(x) = 0{,}84x + 1{,}68$

zu Aufgabe 13: Berechne den Schnittwinkel zwischen den Geraden f und g.

a) $f(x) = 2x$ — Steigungswinkel $\alpha = 63{,}43°$ und $\beta \approx 135°$

$g(x) = -x - 3$ — $|\beta - \alpha| \approx |135° - 63{,}43°| \approx 71{,}57°$

$\rightarrow$ Schnittwinkel $\gamma \approx 71{,}57°$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$ — Steigungswinkel $\alpha \approx 14{,}04°$ und $\beta = 108{,}44°$

$g(x) = -3x + 4$ — $180° - |\beta - \alpha| \approx 180° - |108{,}44° - 14{,}04°| \approx 85{,}6°$

$\rightarrow$ Schnittwinkel $\gamma \approx 85{,}6°$

c) $f(x) = \frac{9}{4}x - 2$ — Steigungswinkel $\alpha \approx 66{,}04°$ und $\beta = 78{,}69°$

$g(x) = 5x + 5$ — $180° - |\beta - \alpha| \approx |78{,}69° - 66{,}04°| \approx 12{,}65°$

$\rightarrow$ Schnittwinkel $\gamma \approx 12{,}65°$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}$ — Steigungswinkel $\alpha \approx 14{,}04°$ und $\beta \approx 63{,}43°$

$g(x) = 2x - \frac{1}{8}$ — $|\beta - \alpha| \approx |63{,}43° - 14{,}04°| \approx 49{,}39°$

$\rightarrow$ Schnittwinkel $\gamma \approx 49{,}39°$

A.4 zu Symmetrie, Schnittpunkte, Monotonie & Globalverhalten

zu Aufgabe 14: Überprüfe die folgenden Funktionen rechnerisch auf das Vorliegen von Standardsymmetrien.

a) $f(x) = -x^4 - 2x^2 - 1$

$$f(-x) = -(-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 - 1 = -x^4 - 2x^2 - 1 = f(x)$$

(Alternativ: Graph hat nur gerade Exponenten)
$\Rightarrow$ f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $f(x) = 0,2x^5 - 4x + 4$

$$f(-x) = 0{,}2 \cdot (-x)^5 - 4 \cdot (-x) + 4 = -0{,}2x^5 + 4x + 4$$

$\Rightarrow$ es liegt keine Standardsymmetrie vor
(Der Graph ist aber punktsymmetrisch zum Punkt $P(0 \mid 4)$, da er nur ungerade Exponenten hat und um 4 Einheiten nach oben verschoben wurde.)

c) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 4x$

$$f(-x) = \frac{1}{8} \cdot (-x)^3 + 4 \cdot (-x) = -\frac{1}{8}x^3 - 4x = -f(x)$$

(Alternativ: Graph hat nur ungerade Exponenten)
$\Rightarrow$ f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

d) $f(x) = -x^2 + 1$

$$f(-x) = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1 = f(x)$$

(Alternativ: Graph hat nur gerade Exponenten)
$\Rightarrow$ f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

e) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + (-x) - 1 = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$\Rightarrow$ es liegt keine Standardsymmetrie vor

f) $f(x) = 3$

$$f(-x) = 3 = f(x)$$

$\Rightarrow$ f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

zu Aufgabe 15: Berechne die Schnittpunkte der Funktionsgraphen.

a) $f(x) = -4x - 2$; $g(x) = -3x + 5$

$$\begin{array}{rrcll} & -4x - 2 & = & -3x + 5 & \mid +3x; +2 \\ \Leftrightarrow & -x & = & 7 & \mid \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow & x & = & -7 & \end{array} \qquad \Rightarrow S(-7 \mid 26)$$

b) $f(x) = -3x^3 + x^2 - 2$; $g(x) = -5x^3 - 15x^2 + 18x - 2$

$$\begin{array}{rrcll}
 & -3x^3 + x^2 - 2 & = & -5x^3 - 15x^2 + 18x - 2 & \mid +5x^3; +15x^2; -18x; +2 \\
\Leftrightarrow & 2x^3 + 16x^2 - 18x & = & 0 & \mid \text{Ausklammern} \\
\Leftrightarrow & x \cdot \left(2x^2 + 16x - 18\right) & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 16x - 18 = 0 & \mid \div 2;\ pq\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & 0 \quad \vee \quad x_2 = -9 \quad \vee\, x_3 = 1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow S_1(0|-2), S_2(-9|2266), S_3(1|-4)$

c) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$; $g(x) = 3x^2 - 4x - 7$

$$\begin{array}{rrcll}
 & 2x^2 - 2x - 4 & = & 3x^2 - 4x - 7 & \mid -3x^2; +4x; +7 \\
\Leftrightarrow & -x^2 + 2x + 3 & = & 0 & \mid \cdot(-1);\ pq\text{-Formel} \\
\Rightarrow & x_1 & = & -1 \quad \vee \quad x_2 = 3 &
\end{array}$$

$\Rightarrow S_1(-1 \mid 0), S_2(3 \mid 8)$

zu Aufgabe 16: Beschreibe (möglichst rechnerisch) das Monotonie- und Globalverhalten der Funktionen.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

- $f'(x) = 4x - 1 \to$ Nullstelle von f' ist $x = \frac{1}{4}$.
- $f'(0) = -1$ und $f'(1) = 3$.
- Die Steigung links von der Nullstelle ist also negativ, die Steigung rechts von der Nullstelle positiv.
- Damit ist f auf dem Intervall $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ monoton fallend und auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}; \infty\right)$ monoton wachsend.
- $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = \infty$

b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x$

- $f'(x) = 9x^2 - 4x - 4 \to$ Nullstellen von f' sind $x_1 \approx -0{,}48$ und $x_2 \approx 0{,}925$.
- $f'(-1) = 9$ und $f'(0) = -4$ und $f'(1) = 1$.
- Damit ist f auf den Intervallen $(-\infty; -0{,}48]$ und $[0{,}925; \infty)$ monoton wachsend und auf dem Intervall $[-0{,}48; 0{,}925]$ monoton fallend.
- $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^3 - 2x^2 - 4x = \lim_{x\to\infty} 3x^3 = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 - 2x^2 - 4x = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$

c) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x$

- $f'(x) = 12x^2 - 8x + 2 \to f$ hat keine Nullstellen.
- $f'(0) = 2$.
- Damit ist f auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend.

- $\lim_{x\to\infty} 4x^3 - 4x^2 + 2x = \lim_{x\to\infty} 4x^3 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} 4x^3 - 4x^2 + 2x = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2$

- $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x \Rightarrow$ Nullstellen von f' sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ und $x_3 = 0{,}5$.
- $f'(-3) = -42$ und $f'(-1) = 6$ und $f'(0{,}25) = -0{,}5625$ und $f'(1) = 6$.
- Damit ist f auf den Intervallen $(-\infty, -2]$ und $[0; 0{,}5]$ monoton fallend und auf den Intervallen $[-2; 0]$ und $[0{,}5; \infty)$ monoton wachsend.
- $\lim_{x\to\infty} x^4 + 2x^3 - 2x^2 = \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^4 + 2x^3 - 2x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$

A.5 zu Extrempunkte

zu Aufgabe 17: Berechne die Extrempunkte der Funktionen.

a) $f(x) = -4x^2 + 4$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = -8x \quad \text{und} \quad f''(x) = -8$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -8x &= 0 \quad | \div(-8) \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f(0) = 4 \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 4)$$

b) $f(x) = 10x + 5$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 10 \quad \text{und} \quad f''(x) = 0$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad 10 = 0 \quad \lightning \text{ keine Nullstellen!}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = 0 \quad \lightning \quad \text{keine Extremstelle}$$

4. y-Wert berechnen: Muss nicht berechnet werden, da es keine Extremstelle gibt.

c) $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 10x - 10 \quad \text{und} \quad f''(x) = 10$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 10x - 10 &= 0 \quad | +10 \\ \Leftrightarrow \quad 10x &= 10 \quad | \div 10 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f(1) = -4 \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -4)$$

d) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x + 2$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 &= 0 \quad | \div 3 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} &= 0 \quad | \; pq\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = \tfrac{1}{3} &\quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''\left(\tfrac{1}{3}\right) &= 4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(-1) &= -4 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{3}\right) &\approx -1{,}185 \Rightarrow \text{TP}\left(\tfrac{1}{3} \mid -1{,}185\right) \\ f(-1) &= 0 \Rightarrow \text{HP}(-1 \mid 0) \end{aligned}$$

e) $f(x) = x^3 + x^2 - 7$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x + 2$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (3x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x_1 = 0 &\vee x_2 = -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''\left(-\tfrac{2}{3}\right) &= -2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned} f(0) &= -7 \quad \Rightarrow \text{TP}(0 \mid -7) \\ f\left(-\tfrac{2}{3}\right) &\approx -6{,}85 \Rightarrow \text{HP}(-\tfrac{2}{3} \mid -6{,}85) \end{aligned}$$

f) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 5x + 10$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 15x^2 - 20x - 5 \quad \text{und} \quad f''(x) = 30x - 20$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 15x^2 - 20x - 5 &= 0 && \mid \div 15 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{3} &= 0 && \mid pq\text{-Formel} \\ \Rightarrow \quad x_1 \approx 1{,}55 &\vee x_2 \approx -0{,}215 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(1{,}55) &\approx 26{,}5 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(-0{,}215) &\approx -26{,}45 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned} f(1{,}55) &\approx -3{,}155 \Rightarrow \text{TP}(1{,}55 \mid -3{,}155) \\ f(-0{,}215) &\approx 10{,}56 \quad \Rightarrow \text{HP}(-0{,}215 \mid 10{,}56) \end{aligned}$$

g) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 8x^3 - 8x \quad \text{und} \quad f''(x) = 24x^2 - 8$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 8x^3 - 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(8x^2 - 8\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 1 &\vee x_3 = -1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= -8 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \\ f''(1) &= 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(-1) &= 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 0) \\ f(1) &= -2 \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -2) \\ f(-1) &= -2 \Rightarrow \text{TP}(-1 \mid -2) \end{aligned}$$

h) $f(x) = x^4 - x^3$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad \text{und} \quad f''(x) = 12x^2 - 6x$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 4x^3 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (4x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 &\vee x_2 = \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \Rightarrow \text{Sattelpunk – kein Hoch- oder Tiefpunkt} \\ f''\left(\tfrac{3}{4}\right) &= \tfrac{9}{4} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f\left(\tfrac{3}{4}\right) = -\tfrac{27}{256} \Rightarrow \text{TP}\left(\tfrac{3}{4} \mid -\tfrac{27}{256}\right)$$

i) $f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-0,6x+0,2}$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = (-12x + 14) \cdot e^{-0,6x+0,2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \left(\frac{36}{5}x - \frac{102}{5}\right) \cdot e^{-0,6x+0,2}$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad (-12x + 14) \cdot e^{-0,6x+0,2} = 0$$

$e^{-0,6x+0,2} \neq 0$ für alle x, deshalb werden nur die Nullstellen von $(-12x + 14)$ berechnet.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -12x + 14 &= 0 \quad \mid -14; \div(-12) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \tfrac{7}{6} \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''\left(\tfrac{7}{6}\right) \approx -7{,}28 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f\left(\tfrac{7}{6}\right) \approx 20{,}22 \Rightarrow \text{TP}\left(\tfrac{7}{6} \mid 20{,}22\right)$$

j) $f(x) = e^{-2x} \cdot \left(x^2 - 3x\right)$

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = \left(-2x^2 + 8x - 3\right) \cdot e^{-2x} \quad \text{und} \quad f''(x) = \left(4x^2 - 20x + 14\right) \cdot e^{-2x}$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad \left(-2x^2 + 8x - 3\right) \cdot e^{-2x} = 0$$

$e^{-2x} \neq 0$ für alle x, deshalb werden nur die Nullstellen von $\left(-2x^2 + 8x - 3\right)$ berechnet.

$$\Rightarrow \quad -2x^2 + 8x - 3 = 0 \qquad | \div(-2);\ pq\text{-Formel}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \approx 0{,}42 \quad \vee \quad x_2 \approx 3{,}58$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(0{,}42) \approx 2{,}72 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(3{,}58) \approx -0{,}005 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

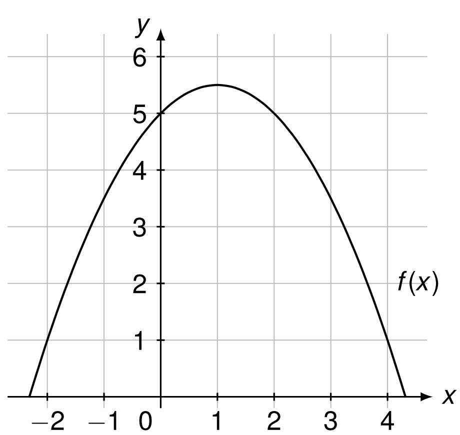
4. y-Wert berechnen:

$$f(0{,}42) \approx -0{,}47 \Rightarrow \text{TP}\,(0{,}42 \mid -0{,}47)$$

$$f(3{,}58) \approx 0{,}002 \Rightarrow \text{HP}\,(3{,}58 \mid 0{,}002)$$

zu Aufgabe 18: Ein Berg lässt sich mit dem Graphen $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 5$ für $-2{,}32 \leq x \leq 4{,}32, x \in \mathbb{R}$ beschreiben. Dabei gibt der y-Wert die Höhe in 100-Meter-Schritten an.

a) Zeichne den Graphen mit dem GTR und interpretiere, warum $-2{,}32 \leq x \leq 4{,}32$ gilt.



$x = -2{,}32$ und $x = 4{,}32$ sind die Nullstellen des Graphen. Zwischen ihnen liegt der Graph oberhalb der x-Achse. Mit dem Definitionsbereich wird nur der Bereich des Berges betrachtet, der oberhalb des Meeresspiegels liegt. Wahrscheinlich tritt der Berg erst bei einem y-Wert von 0 aus dem Boden und ist unter diesem Wert nicht darstellbar.

b) Berechne den Extrempunkt des Graphen und interpretiere ihn im Sachkontext.

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = -x + 1 \quad \text{und} \quad f''(x) = -1$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -x + 1 &= 0 \quad \mid -1 \\ \Leftrightarrow \quad -x &= -1 \quad \mid \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow \quad x &= 1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f(1) = 5{,}5 \Rightarrow \text{HP}\,(1 \mid 5{,}5)$$

Interpretation:
Der Hochpunkt stellt die Spitze des Berges dar. Damit ist der Berg rund 550 m hoch.

zu Aufgabe 19: Das Wachstum einer Pflanze kann in den ersten fünf Tagen mit einer Funktion beschrieben werden. Diese lautet $f(t) = 0{,}1t^4 - 1{,}1t^3 + 3t^2 + 2$. Die t-Werte stellen dabei Tage dar und die y-Werte das Wachstum in cm/Tag.

a) Berechne den Wert $f(3)$. Was sagt dieser aus?

$$f(3) = 7{,}4$$

Der Wert sagt aus, dass die Pflanze zum Zeitpunkt $t = 3$ (also zu Beginn des vierten Tages) mit einer Geschwindigkeit von 7,4 cm/ Tag wächst.

b) Wann ist die Pflanze am größten und wann am kleinsten?

Die Funktion gibt das **Wachstum** der Pflanze an, nicht ihre Größe. Da die Funktion im gesamten Intervall größer als Null ist (die Pflanze also im gesamten Intervall wächst), ist sie zu Beginn, also bei $t = 0$ am kleinsten und am Ende des Beobachtungszeitraums bei $t = 5$, also am Ende des fünften Tages, am größten.

c) Wann wächst die Pflanze am stärksten und wann am schwächsten? Wie groß/klein ist ihr Wachstum dort?

Hier müssen nun die Extrempunkte der Funktion herausgefunden werden, da wir so herausfinden, wann sie am stärksten/schwächsten wächst.

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(t)$ berechnen:

$$f'(t) = 0{,}4t^3 - 3{,}3t^2 + 6t \quad \text{und} \quad f''(t) = 1{,}2t^2 - 6{,}6t + 6$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0{,}4t^3 - 3{,}3t^2 + 6t &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad t \cdot \left(0{,}4t^2 - 3{,}3t + 6\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad t_1 = 0 \quad \vee \quad \left(0{,}4t^2 - 3{,}3t + 6\right) &= 0 \quad | \div 0{,}4;\ pq\text{- Formel} \\
\Leftrightarrow \quad t_2 \approx 5{,}545 \quad \vee t_3 &\approx 2{,}705
\end{aligned}$$

Anmerkung: $t_2 \approx 5,545$ fällt als Lösung raus, da es nicht im Beobachtungszeitraum liegt.

3. Hinreichende Bedingung: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\
f''(2{,}705) &\approx -3{,}072 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}
\end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2 \Rightarrow \text{TP}\,(0 \mid 2) \\
f(2{,}705) &= 7{,}533 \Rightarrow \text{TP}\,(2{,}705 \mid 7{,}533)
\end{aligned}$$

Man könnte meinen, dass man hier schon fertig ist, allerdings müssen unbedingt noch die Randextrema überprüft werden, da es sein könnte, dass die Pflanze beim Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = 5$ stärker bzw. schwächer als bei den herausgefundenen Extrempunkten wächst.

Randextrema:

- $f(0)$ haben wir schon herausgefunden.
- $f(5) = 2 \rightarrow$ Hier wächst die Pflanze also genauso schwach wie beim Tiefpunkt.

Antwort: Die Pflanze hat also mit 7,533 cm/ Tag ihr stärkstes Wachstum nach ca. 2,7 Tagen, was ungefähr zwei Tagen und 17 Stunden entspricht.

Das niedrigste Wachstum mit 2 cm/ Tag hat die Pflanze zu Beginn, also zum Zeitpunkt $t = 0$ und am Ende des fünften Tages, also zum Zeitpunkt $t = 5$.

zu Aufgabe 20: Eine Rampe für Skater soll gebaut werden. Diese kann für $-1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{R}$ durch die Funktionsgleichung $f(x) = e^{-0{,}75x} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$ modelliert werden. Dabei steht x für die Länge der Rampe in Metern und $f(x)$ für die Höhe über dem Boden in Metern.

Am Anfang der Rampe starten die Skater von einer erhöhten Position, um Schwung zu holen. Mach dir diese Situation und den Verlauf der Rampe an der Zeichnung des Graphen mit dem GTR bewusst.

Die Stadt möchte die Rampe nur genehmigen, wenn sie zu keinem Zeitpunkt mehr als einen Meter über dem Boden ist. Dadurch soll das Sicherheitsrisiko für die Skater gering gehalten werden. Erfüllt die Rampe diese Auflage?

Um die Frage beantworten zu können, berechnen wir den Hochpunkt der Rampe.

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = e^{-0{,}75x} \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{16}\right) \quad \text{und} \quad f''(x) = e^{-0{,}75x} \cdot \left(\frac{36}{64}x^2 - 3x + \frac{137}{64}\right)$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad e^{-0{,}75x} \cdot \left(-\tfrac{3}{4}x^2 + 2x - \tfrac{3}{16}\right) = 0$$

$e^{-0{,}75x} \neq 0$ für alle x, deshalb werden nur die Nullstellen von $\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{16}\right)$ berechnet.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -\tfrac{3}{4}x^2 + 2x - \tfrac{3}{16} &= 0 \qquad \left| \div \left(-\tfrac{3}{4}\right);\ pq\text{-Formel} \right. \\ \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 0{,}1 \quad &\vee \quad x_2 \approx 2{,}57 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0{,}1) &\approx 1{,}71 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(2{,}57) &\approx -0{,}27 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

Anmerkung: Interessant ist für uns nur der Hochpunkt.

4. y-Wert berechnen:

$$f(2{,}57) = 0{,}997 \Rightarrow \text{HP}\,(2{,}57 \mid 0{,}997)$$

Interpretation:
Mit dieser Lösung könnte man meinen, dass die Auflage der Stadt erfüllt wird, da der Hochpunkt knapp unter einem Meter, nämlich ca. 99,7 cm über dem Boden liegt. Allerdings müssen hier noch die **Randextrema** überprüft werden:

$$f(-1) \approx 2{,}65 \qquad \text{und} \qquad f(10) \approx 0{,}05545$$

Am Anfang liegt die Rampe mit ca. 2,65 aber deutlich über der Vorschrift der Stadt und würde somit nicht von ihr genehmigt werden.

A.6 zu Wendepunkte

zu Aufgabe 21: Berechne die Koordinaten der Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x + 6 \quad \text{sowie} \quad f'''(x) = 2$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 6x + 6 &= 0 \qquad \mid -6; \div 6 \\ \Leftrightarrow \quad x &= -1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f'''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung}$$

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \text{WP}(-1 \mid 0)$$

b) $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + 16x^2 - 5x + 1$

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 32x - 5 \quad \text{und} \quad f''(x) = -2x^2 + 32 \quad \text{sowie} \quad f'''(x) = -4x$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -2x^2 + 32 &= 0 \qquad \mid -32; \div(-2); \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 4 &\vee x_2 = -4 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(4) &= -16 < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung} \\ f'''(-4) &= 16 > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung} \end{aligned}$$

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$\begin{aligned} f(4) &= \tfrac{583}{3} \Rightarrow \text{WP}_1(4 \mid \tfrac{583}{3}) \\ f(-4) &= \tfrac{703}{3} \Rightarrow \text{WP}_2(-4 \mid \tfrac{703}{3}) \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{24}x^3 - 4x$

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{8}x^2 - 4 \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x \quad \text{sowie} \quad f'''(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{1}{4}x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}x \cdot \left(x^2 - 1\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 &\vee x^2 - 1 = 0 \quad \mid +1; \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \vee x_2 = 1 &\vee x_3 = -1 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -\tfrac{1}{4} < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung} \\ f'''(1) &= \tfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung} \\ f'''(-1) &= \tfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung} \end{aligned}$$

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \Rightarrow \text{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(1) &\approx -4{,}03 \Rightarrow \text{WP}_2(1 \mid -4{,}03) \\ f(-1) &\approx 4{,}03 \Rightarrow \text{WP}_3(1 \mid 4{,}03) \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2$

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \quad \text{und} \quad f''(x) = x^2 - 4x - 5 \quad \text{sowie} \quad f'''(x) = 2x - 4$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 5 &= 0 \qquad | \, pq\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 &\vee x_2 = 5 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= -6 < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung} \\ f'''(5) &= 6 > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung} \end{aligned}$$

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0{,}25 \Rightarrow WP_1(-1 \mid 0{,}25) \\ f(5) &\approx -91{,}75 \Rightarrow WP_2(5 \mid -91{,}75) \end{aligned}$$

zu Aufgabe 22: Zur besseren Personalplanung untersucht ein Unternehmen, wie viele Menschen sich während der Öffnungszeiten von 08:00 Uhr morgens bis 20:00 Uhr abends in ihrem neuen Ladenlokal befinden.

Die Situation lässt sich näherungsweise durch die folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 20x^2 - 150x + 350$$

$f(10)$ gibt beispielsweise an, wie viele Besucher sich um 10:00 Uhr im Laden befinden.

a) Gib begründet einen Definitionsbereich an, der dir im Sachkontext sinnvoll erscheint.

Der Laden hat von 8:00 Uhr bis 20:00 Uhr geöffnet, deshalb ist es auch nur sinnvoll die Funktion in diesem Intervall, also $8 \leq x \leq 20$ zu betrachten.

b) Vor allem zu der Stoßzeit möchte das Unternehmen genug Personal im Laden haben. Berechne zu welchem Zeitpunkt die meisten Besucher im Laden sind und wie viele es sind.

Gesucht ist hier der Hochpunkt der Funktion.

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

$$f'(x) = -2x^2 + 40x - 150 \quad \text{und} \quad f''(x) = -4x + 40$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -2x^2 + 40x - 150 &= 0 \qquad | \div(-2); pq\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 5 &\vee x_2 = 15 \end{aligned}$$

Anmerkung: $x_1 = 5$ im Sachkontext uninteressant.

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$f''(15) = -20 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f(15) = 350 \Rightarrow \text{HP}\,(15 \mid 350)$$

5. Randextrema überprüfen:

$$f(8) \approx 89 \quad \text{und} \quad f(20) \approx 17$$

A.: Die meisten Besucher, und zwar 350, befinden sich um 15 Uhr im Laden.

c) Berechne auch, zu welcher Zeit die Besucherzahl am stärksten zunimmt. Wie groß ist die Zunahme und wie viele Besucher befinden sich zu diesem Zeitpunkt im Laden?

Gesucht ist hier der Wendepunkt.

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = -2x^2 + 40x - 150 \quad \text{und} \quad f''(x) = -4x + 40 \quad \text{sowie} \quad f'''(x) = -4$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -4x + 40 &= 0 \quad \mid -40; \div(-4) \\ \Leftrightarrow \quad x &= 10 \end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f'''(10) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung}$$

- Genaue Zunahme berechnen: $f'(10) = 50$
- Randextrema prüfen: $f'(8) \approx 42$ und $f'(20) \approx -150$

Die stärkste Zunahme an Besuchern liegt also um 10 Uhr vor. Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Besucheranzahl um 50 Besucher/Stunde zu.

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$f(10) \approx 183 \Rightarrow \text{WP}(10 \mid 183)$$

A.: Um 10 Uhr befinden sich 183 Besucher im Laden.

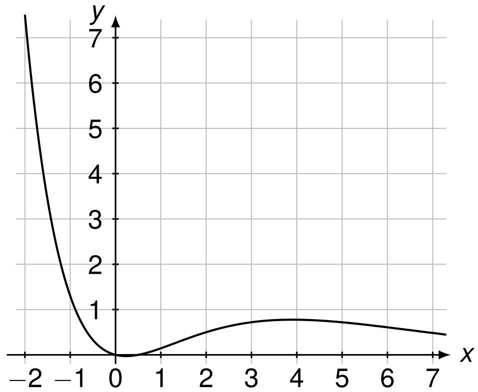
d) *„Der Graph ist zwischen 8 und 10 Uhr linksgekrümmt."*
Zeige, dass diese Aussage stimmt und interpretiere sie im Sachkontext.

$f''(x)$ gibt die Krümmung des Graphen an. Da $f''(x)$ nur die Nullstelle $x = 10$ besitzt und beispielsweise $f''(9) > 0$ gilt, gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in (8, 10)$ ist. Damit ist die Funktion in dem Bereich linksgekrümmt.

Interpretation:
Im Sachkontext bedeutet das, dass die Änderungsrate der Besucheranzahl in diesem Intervall zunimmt, dass das Wachstum von Besuchern also immer weiter steigt.

zu Aufgabe 23: Eine kleine Sprungvorrichtung für Skifahrer wird geplant. Sie kann näherungsweise durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(x^2 - 0{,}5x\right)$ beschrieben werden. Bei $x = -2$ startet der Skifahrer, beschleunigt dann schnell und springt schließlich ab, wenn die Sprungschanze wieder nach oben geht. Eine Einheit steht dabei für einen Meter.

a) Fertige mithilfe des GTRs eine geeignete Zeichnung an.



Der Skifahrer startet oben links, fährt die Sprungvorrichtung runter und wird irgendwo im Bereich zwischen $1 \leq x \leq 3$ abspringen.

b) Die Sprungvorrichtung soll im Punkt mit der stärksten Steigung enden, damit der Skifahrer möglichst hoch springt. Berechne die genauen Koordinaten dieses Punktes.

Gesucht ist der Wendepunkt.

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion bilden.

$$f'(x) = e^{-0{,}5x} \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}\right) \quad \text{und} \quad f''(x) = e^{-0{,}5x} \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{17}{16}x + \frac{5}{4}\right) \quad \text{sowie}$$
$$f'''(x) = e^{-0{,}5x} \cdot \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{25}{32}x - \frac{27}{16}\right)$$

2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad e^{-0{,}5x} \cdot \left(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{17}{16}x + \tfrac{5}{4}\right) = 0$$
$$e^{-0{,}5x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ Nur Nulstellen von } \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{17}{16}x + \tfrac{5}{4} \text{ berechnen.}$$
$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{17}{16}x + \tfrac{5}{4} = 0 \qquad \mid \div \left(\tfrac{1}{8}\right);\ pq\text{-Formel}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 \approx 1{,}41 \quad \vee \quad x_2 \approx 7{,}09$$

Anmerkung: $x_2 \approx 7{,}09$ ist uninteressant, da wir durch die Zeichnung in a) gesehen haben, dass das ein Wendepunkt ist, bei dem die Steigung am stärksten abnimmt.

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f'''(1{,}41) = -0{,}35 < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung}$$

Aus der Zeichnung geht hervor, dass es sich hier um den gesuchten Punkt mit der stärksten Steigung handelt. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass es keine Randextrema gibt, die überprüft werden müssten.

4. y-Werte des Wendepunktes berechnen:

$$f(1{,}41) \approx 0{,}32 \Rightarrow \text{WP}(1{,}41 \mid 0{,}32)$$

A.: Die Sprungvorrichtung muss also ca. im Punkt (1,41 | 0,32) enden.

c) Damit die Sprungschanze zugelassen wird, darf der Steigungswinkel an der Absprungstelle nicht größer als 25° sein. Berechne, ob diese Voraussetzung erfüllt wird.

- Die Steigung im Wendepunkt beträgt: $f'(1{,}41) \approx 0{,}41$.
- Das entspricht einem Winkel von $\alpha = \tan^{-1}(0{,}41) \approx 22{,}3°$.

A.: Die Sprungschanze erfüllt also die Anforderung.

A.7 zu *e*-Funktion & ln-Funktion

zu Aufgabe 24: Löse folgende Gleichungen nach x auf.

a) $2e^{4x+1} = 4$

$$\begin{array}{rrcll} & 2e^{4x+1} & = & 4 & |: 2 \\ \Leftrightarrow & e^{4x+1} & = & 2 & | \ln \\ \Leftrightarrow & \ln\left(e^{4x+1}\right) & = & \ln(2) & | \ln \text{ und } e \text{ lösen sich gegenseitig auf} \\ \Leftrightarrow & 4x+1 & = & \ln(2) & | -1 \\ \Leftrightarrow & 4x & = & \ln(2)-1 & |: 4 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{\ln(2)-1}{4} \approx -0{,}0767 & \end{array}$$

b) $(2x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} - 1 = -1$

$$\begin{array}{rrcll} & (2x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} - 1 & = & -1 & | +1 \\ \Leftrightarrow & (2x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & = & 0 & | \text{ Es gilt } e^{-\frac{x}{2}} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \\ \Leftrightarrow & 2x+2 & = & 0 & | -2 \\ \Leftrightarrow & 2x & = & -2 & |: 2 \\ \Leftrightarrow & x & = & -1 & \end{array}$$

c) $\dfrac{1}{2} \cdot e^{-3x-2} = 5$

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{1}{2} \cdot e^{-3x-2} & = & 5 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & e^{-3x-2} & = & 10 & | \ln \\ \Leftrightarrow & \ln\left(e^{-3x-2}\right) & = & \ln(10) & | \ln \text{ und } e \text{ lösen sich gegenseitig auf} \\ \Leftrightarrow & -3x-2 & = & \ln(10) & | +2 \\ \Leftrightarrow & -3x & = & \ln(10)+2 & |: (-3) \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{\ln(10)+2}{3} \approx -1{,}4342 & \end{array}$$

d) $\left(-2x^2+32x\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-9x+2}=0$

$$\begin{array}{rrcll}
 & \left(-2x^2+32x\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-9x+2} & = & 0 & \mid \text{Es gilt } \frac{1}{4}e^{-9x+2}\neq 0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & -2x^2+32x & = & 0 & \mid 2x \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow & 2x\cdot(-x+16) & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & x_1=0 & \vee & -x+16=0 & \mid -16 \\
\Leftrightarrow & x_1=0 & \vee & -x=-16 & \mid \cdot(-1) \\
\Leftrightarrow & x_1=0 & \vee & x_2=16 &
\end{array}$$

zu Aufgabe 25: Bilde jeweils die erste Ableitung und vereinfache.

a) $f(x)=e^{-4x^2+2x-8}$

Kettenregel: $f'(x) = (-8x+2)\cdot e^{-4x^2+2x-8}$

b) $f(x)=12x^3\cdot e^x$

Produktregel: $f'(x) = 36x^2\cdot e^x + e^x\cdot 12x^3 = \left(12x^3+36x^2\right)\cdot e^x$

c) $f(x)=\left(x^4-x^2\right)\cdot e^{-3x-1}$

Produkt- und Kettenregel:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^3-2x\right)\cdot e^{-3x-1}+(-3)\cdot e^{-3x-1}\cdot\left(x^4-x^2\right)\\ &= \left(-3x^4+4x^3+3x^2-2x\right)\cdot e^{-3x-1}\end{aligned}$$

d) $f(x)=\dfrac{4e^x-1}{e^x+x^2}$

Quotientenregel:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4e^x\cdot\left(e^x+x^2\right)-\left(e^x+2x\right)\cdot\left(4e^x-1\right)}{\left(e^x+x^2\right)^2}\\ &= \frac{\left(4x^2-8x+1\right)\cdot e^x+2x}{\left(e^x+x^2\right)^2}\end{aligned}$$

zu Aufgabe 26: Berechne die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte von f.

a) $f(x)=3x\cdot e^{-4x}$

(i) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot e^{-4x}+(-4)\cdot e^{-4x}\cdot 3x = (-12x+3)\cdot e^{-4x}\\ f''(x) &= -12\cdot e^{-4x}+(-4)\cdot e^{-4x}\cdot(-12x+3) = (48x-24)\cdot e^{-4x}\\ f'''(x) &= 48\cdot e^{-4x}+(-4)\cdot e^{-4x}\cdot(48x-24) = (-192x+144)\cdot e^{-4x}\end{aligned}$$

(ii) Nullstellen:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 3x\cdot e^{-4x} & = & 0 \mid e^{-4x}\neq 0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R} & \\
\Leftrightarrow & 3x & = & 0 & \mid \div 3 \\
\Leftrightarrow & x & = & 0 &
\end{array}$$

Das heißt, die Funktion hat eine Nullstelle bei $N(0\mid 0)$.

(iii) Extrempunkte:

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ haben wir bereits in (i) berechnet.
2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & (-12x+3)\cdot e^{-4x} & = & 0 & \mid e^{-4x} \neq 0 \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & -12x+3 & = & 0 & \mid -3 \\ \Leftrightarrow & -12x & = & -3 & \mid \div(-12) \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{4} & \end{array}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''\left(\tfrac{1}{4}\right) \quad \approx \quad -4{,}41 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen: $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}276 \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{1}{4} \mid 0{,}276\right)$

(iv) Wendepunkte:

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion haben wir bereits in (i) berechnet.
2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & (48x-24)\cdot e^{-4x} & = & 0 & \mid e^{-4x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & 48x-24 & = & 0 & \mid +24 \\ \Leftrightarrow & 48x & = & 24 & \mid : 48 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{2} & \end{array}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad \approx \quad 6{,}5 \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rechts-Links-Krümmung}$$

4. y-Werte berechnen: $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}203 \Rightarrow \text{WP}\left(\frac{1}{2} \mid 0{,}203\right)$

b) $f(x) = \left(-x^2+1\right)\cdot e^{-3x}$

(i) Ableitungen:

$$f'(x) = -2x\cdot e^{-3x} + (-3)\cdot e^{-3x}\cdot\left(-x^2+1\right) = \left(3x^2-2x-3\right)\cdot e^{-3x}$$
$$f''(x) = (6x-2)\cdot e^{-3x} + (-3)\cdot e^{-3x}\cdot\left(3x^2-2x-3\right) = \left(-9x^2+12x+7\right)\cdot e^{-3x}$$
$$f'''(x) = (-18x+12)\cdot e^{-3x} + (-3)\cdot e^{-3x}\cdot\left(-9x^2+12x+7\right) = \left(27x^2-54x-9\right)\cdot e^{-3x}$$

(ii) Nullstellen:

$$\begin{array}{lrcll} & \left(-x^2+1\right)\cdot e^{-3x} & = & 0 & \mid e^{-3x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & -x^2+1 & = & 0 & \mid -1 \\ \Leftrightarrow & -x^2 & = & -1 & \mid \cdot(-1) \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 1 & \mid \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow & x_1 = 1 & \vee & x_2 = -1 & \end{array}$$

Das heißt, die Funktion hat die Nullstellen bei $N_1(1 \mid 0)$ und $N_2(-1 \mid 0)$.

(iii) Extrempunkte:

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ haben wir bereits in (i) berechnet.
2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(3x^2 - 2x - 3\right) \cdot e^{-3x} &= 0 && \mid e^{-3x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x - 3 &= 0 && \mid \div 3 \\
\Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{2}{3}x - 1 &= 0 && \mid pq\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow \quad x_1 \approx -0{,}72 &\vee x_2 \approx 1{,}39
\end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f''(-0{,}72) &\approx -54{,}68 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt} \\
f''(1{,}39) &\approx 0{,}097 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}
\end{aligned}$$

4. y-Wert berechnen:

$$\begin{aligned}
f(-0{,}72) &\approx 4{,}18 \Rightarrow \text{HP}\,(-0{,}72 \mid 4{,}18) \\
f(1{,}39) &\approx -0{,}014 \Rightarrow \text{TP}\,(1{,}39 \mid -0{,}014)
\end{aligned}$$

(iv) Wendepunkte:

1. Die ersten drei Ableitungen der Funktion haben wir bereits in (i) berechnet.
2. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(-9x^2 + 12x + 7\right) \cdot e^{-3x} &= 0 && \mid e^{-3x} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad -9x^2 + 12x + 7 &= 0 && \mid \div(-9) \\
\Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{7}{9} &= 0 && \mid pq\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow \quad x_1 \approx -0{,}44 &\vee x_2 \approx 1{,}77
\end{aligned}$$

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f'''(-0{,}44) &\approx 74{,}82 > 0 \Rightarrow \text{Rechts-Links-Krümmung} \\
f'''(1{,}77) &\approx -0{,}099 < 0 \Rightarrow \text{Links-Rechts-Krümmung}
\end{aligned}$$

4. y-Werte berechnen:

$$\begin{aligned}
f(-0{,}44) &\approx 3{,}02 \Rightarrow \text{WP}_1(-0{,}44 \mid 3{,}02) \\
f(1{,}77) &\approx -0{,}01 \Rightarrow \text{WP}_2(1{,}77 \mid -0{,}01)
\end{aligned}$$

zu Aufgabe 27: Berechne die Extrempunkte der Funktion $f(x) = -x^2 \cdot \ln(x)$ ohne Taschenrechner.

1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen.

$$f'(x) = -2x \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \left(-x^2\right) = -x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) \quad \text{und}$$
$$f''(x) = -1 \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) + \frac{2}{x} \cdot (-x) = -2 \cdot \ln(x) - 3$$

2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{llcll}
\Rightarrow & -x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) & = & 0 & |\ \text{linker oder rechter Teil muss Null werden} \\
\Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & 2 \cdot \ln(x) + 1 = 0 & |-1 \\
\Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & 2 \cdot \ln(x) = -1 & |\div 2 \\
\Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & \ln(x) = -\frac{1}{2} & |e \\
\Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & x = e^{-\frac{1}{2}} &
\end{array}$$

$x_1 = 0$ fällt als Lösung raus, da der Wert nicht im Definitionsbereich liegt. Durch $\ln(x)$ kann x nämlich nur Werte annehmen, die größer als Null sind.

3. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -2 \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) - 3 = -2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) - 3 = -2 \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert berechnen:

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{HP}\left(e^{-\frac{1}{2}} \mid \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1}\right)$$

zu Aufgabe 28: Vereinfache ohne Verwendung des Taschenrechners.

a) $\ln\left(e^{-2}\right) = -2 \cdot \ln(e) = -2$

b) $\ln(1) = 0$

c) $\ln(0)$ ist nicht definiert

d) $-3 \cdot \ln\left(e^4\right) = -3 \cdot 4 = -12$

e) $e^{\ln(5)+\ln(2)} = e^{\ln(5\cdot 2)} = e^{\ln(10)} = 10$

f) $\ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = \ln\left(e^{-4}\right) = -4$

A.8 zu Lineare Gleichungssysteme

zu Aufgabe 29: Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden linearen Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 4x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

Daraus können wir nun die Lösungen berechnen:

$$\begin{array}{lrcl} y \text{ aus II:} & -5y & = & -10 \Leftrightarrow y = 2 \\ y = 2 \text{ in I einsetzen:} & 2x + 1 \cdot (2) & = & 4 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

Ergebnis: Genau eine Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{1; 2\}$.

---

b)
$$\begin{array}{rcr} x - y + z & = & 5 \\ 2x + y - 3z & = & -3 \\ -x + 2y + 2z & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{II} -2\,\text{I}]{\text{III} +\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{3\cdot\,\text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{array}\right)$$

Daraus können wir nun die Lösungen berechnen:

$$\begin{array}{lrcl} z \text{ aus III:} & -14z & = & -28 \Leftrightarrow z = 2 \\ z = 2 \text{ in II einsetzen:} & 3y - 5 \cdot (2) & = & -13 \Leftrightarrow y = -1 \\ z = 2, y = -1 \text{ in I einsetzen:} & x - (-1) + (2) & = & 5 \Leftrightarrow x = 2 \end{array}$$

Ergebnis: Genau eine Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{2; -1; 2\}$.

---

c)
$$\begin{array}{rcr} x + 2y - z & = & 3 \\ 3x + 11y - 7z & = & 6 \\ 4x - 2y + 4z & = & 16 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 11 & -7 & 6 \\ 4 & -2 & 4 & 16 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{II} -3\cdot\,\text{I}]{\text{III} -4\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & -10 & 8 & 4 \end{array}\right) \xLeftrightarrow{\text{III} +2\cdot\,\text{II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Ergebnis: Keine Lösung, da in der letzten Zeile eine falsche Aussage $0 = -2$ steht: $\mathbb{L} = \{\}$.

---

d)
$$\begin{array}{rcr} 2x - y - z & = & -6 \\ x + 3y - 4z & = & -10 \\ 4x - 2y + 3z & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[2\cdot\text{II} - \text{I}]{\text{III} -2\cdot\,\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$

Daraus können wir nun die Lösungen berechnen:

$$\begin{array}{lrcl} z \text{ aus III:} & 5z & = & 15 \Leftrightarrow z = 3 \\ z = 3 \text{ in II einsetzen:} & 7y - 7 \cdot (3) & = & -14 \Leftrightarrow y = 1 \\ z = 3, y = 1 \text{ in I einsetzen:} & 2x - (1) - (3) & = & -6 \Leftrightarrow x = -1 \end{array}$$

Ergebnis: Genau eine Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{-1; 1; 3\}$.

e) $$\begin{aligned} 2x + 1y - 4z &= 1 \\ 3x + 2y - 7z &= 1 \\ 4x - 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -7 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xleftrightarrow[2\cdot \text{II} - 3\cdot \text{I}]{\text{III} - 2\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\text{III} + 5\cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ergebnis: Unendlich viele Lösungen, da in der letzten Zeile eine wahre Aussage vorliegt.

1. Gleichung mit den wenigsten Variablen aussuchen.

   Die zweite Zeile hat die wenigsten Variablen.

2. Diese Gleichung nach einer Variablen umstellen.

$$y - 2z = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 + 2z$$

3. Lösung in die anderen Gleichungen einsetzen.
   $y = -1 + 2z$ in I einsetzen und so umformen, dass die Gleichung von z abhängt:

$$2x + (-1 + 2z) - 4z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + z$$

Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{1 + z; -1 + 2z; z\}$.

---

f) $$\begin{aligned} a + b + c + d &= 10 \\ 2a - b - 3c + 2d &= 1 \\ 5a + 3b - 8c - d &= 12 \\ 3a + 2b + 2c - 4d &= 18 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -8 & -1 & 12 \\ 3 & 2 & 2 & -4 & 18 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\text{IV} - 3\cdot \text{I}]{\text{II} - 2\cdot \text{I} \,\&\, \text{III} - 5\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -19 \\ 0 & -2 & -13 & -6 & -38 \\ 0 & -1 & -1 & -7 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[3\cdot \text{IV} - \text{II}]{3\cdot \text{III} - 2\cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & -29 & -18 & -76 \\ 0 & 0 & 2 & -21 & -17 \end{array}\right) \xleftrightarrow{29\cdot \text{IV} + 2\cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & -29 & -18 & -76 \\ 0 & 0 & 0 & -645 & -645 \end{array}\right)$$

Daraus können wir nun die Lösungen berechnen:

$$\begin{array}{lrcll} d \text{ aus IV:} & -645d & = & -645 & \Leftrightarrow d = 1 \\ d = 1 \text{ in III einsetzen:} & -29c - 18 \cdot (1) & = & -76 & \Leftrightarrow c = 2 \\ d = 1, c = 2 \text{ in II einsetzen:} & -3b - 5 \cdot (2) & = & -19 & \Leftrightarrow b = 3 \\ d = 1, c = 2, b = 3 \text{ in I einsetzen:} & a + (3) + (2) + (1) & = & 10 & \Leftrightarrow a = 4 \end{array}$$

Ergebnis: Genau eine Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{4; 3; 2; 1\}$.

zu Aufgabe 30: Löse die Aufgabe mit einem LGS.

Wir möchten das Alter einer Tochter, ihrer Mutter und ihrer Oma herausfinden. Dazu sind uns folgende Informationen gegeben:

- Addiert man das Alter der Tochter, der Mutter und der Oma, so erhält man 128.
- Zieht man vom doppelten Alter der Tochter das dreifache Alter der Mutter ab und addiert das vierfache Alter der Oma, so erhält man 168.
- Nimmt man das doppelte Alter der Mutter und zieht von ihm das dreifache Alter der Tochter und das zweifache Alter der Oma ab, so erhält man -98.

Wie alt sind Tochter, Mutter und Oma?

Informationen in ein LGS übertragen:

$$\begin{array}{lll} x & \triangleq & \text{Alter der Tochter} \\ y & \triangleq & \text{Alter der Mutter} \\ z & \triangleq & \text{Alter der Oma} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{I} & x+y+z & = & 128 \\ \text{II} & 2x-3y+4z & = & 168 \\ \text{III} & -3x+2y-2z & = & -98 \end{array}$$

Zeilen umformen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 128 \\ 2 & -3 & 4 & 168 \\ -3 & 2 & -2 & -98 \end{array}\right) \underset{\text{II}-2\text{I}}{\overset{\text{III}+3\text{I}}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 128 \\ 0 & -5 & 2 & -88 \\ 0 & 5 & 1 & 286 \end{array}\right) \overset{\text{III}+\text{II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 128 \\ 0 & -5 & 2 & -88 \\ 0 & 0 & 3 & 198 \end{array}\right)$$

Daraus können wir nun die Lösungen berechnen:

$$\begin{array}{lrcll} z \text{ aus III:} & 3z & = & 198 & \Leftrightarrow z = 66 \\ z = 66 \text{ in II einsetzen:} & -5y + 2\cdot(66) & = & -88 & \Leftrightarrow y = 44 \\ z = 66, y = 44 \text{ in I einsetzen:} & x + (44) + (66) & = & 128 & \Leftrightarrow x = 18 \end{array}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich $\mathbb{L} = \{18; 44; 66\}$.

A.: Die Tochter ist also 18 Jahre alt, die Mutter 44 und die Oma 66 Jahre.

A.9 zu Steckbriefaufgaben

zu Aufgabe 31: Fülle die Tabelle aus.

Text in der Aufgabenstellung	Übersetzung in Bedingung / Gleichung
f hat eine Nullstelle bei $x = -2$.	$f(-2) = 0$
f hat den y-Achsenabschnitt beim Wert 1.	$f(0) = 1$

Der x-Achsenabschnitt von f liegt beim Wert 5.	$f(5) = 0$
f geht durch den Punkt $P(3 \mid 2)$.	$f(3) = 2$
f hat im Punkt $P(1 \mid -1)$ die Steigung -2.	$f(1) = -1$ und $f'(1) = -2$
f nimmt bei $x = 10$ ein Minimum an.	$f'(10) = 0$
An der Stelle $x = 0$ ist die Steigung von f maximal.	$f''(0) = 0$
f hat den Tiefpunkt TP$(-3 \mid 4)$.	$f(-3) = 4$ und $f'(-3) = 0$
f hat den Hochpunkt HP$(1 \mid 1)$.	$f(1) = 1$ und $f'(1) = 0$
Im Punkt $P(2 \mid 4)$ hat f einen Wendepunkt.	$f(2) = 4$ und $f''(2) = 0$
Im Wendepunkt WP$(-1 \mid -2)$ hat die Wendetangente eine Steigung von 2.	$f(-1) = -2$, $f'(-1) = 2$ und $f''(-1) = 0$
f berührt die x-Achse an der Stelle $x = -2$.	$f(-2) = 0$ und $f'(-2) = 0$
f hat an der Stelle $x = 1$ dieselbe Steigung wie $g(x) = -2x^2$.	$f'(1) = -4$
f schneidet die Funktion $g(x) = -x^2 + 2x$ an der Stelle $x = -1$.	$f(-1) = -3$
f berührt die Funktion $g(x) = x^3 - x^2$ an der Stelle $x = 3$.	$f(3) = 18$ und $f'(3) = 21$
Die Tangente an der Stelle $x = 4$ ist parallel zur Geraden $g(x) = -2x$.	$f'(4) = -2$
Die Tangente an der Stelle $x = -2$ verläuft orthogonal zur Geraden $g(x) = -3x$.	$f'(-2) = \frac{1}{3}$

zu Aufgabe 32: Bestimme eine ganzrationale Funktion...

a) zweiten Grades, deren Graph einen Tiefpunkt bei TP$(-2 \mid 1)$ hat und eine Steigung von 2 bei $x = 0$.

1. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.
   Da wir eine Funktion zweiten Grades suchen, benutzen wir folgende allg. Funktionsgleichungen:

   $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

   $$f'(x) = 2ax + b$$

2. Bedingungen für neue Funktion formulieren. Wir benötigen 3 Bedingungen:

   $$\begin{array}{lcrcr} \text{Tiefpunkt bei TP}(-2 \mid 1) & \Rightarrow & f(-2) & = & -1 \\ \text{Steigung im Tiefpunkt gleich Null} & \Rightarrow & f'(-2) & = & 0 \\ \text{Steigung bei } x = 0 \text{ ist } 2 & \Rightarrow & f'(0) & = & 2 \end{array}$$

3. Bedingungen in allg. Funktionsgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} f(-2)=-1 \quad &\Rightarrow & a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c &= 1 & \\ &\Leftrightarrow & 4a-2b+c &= 1 & (1) \\[1ex] f'(-2)=0 \quad &\Rightarrow & 2a\cdot(-2)+b &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & -4a+b &= 0 & (2) \\[1ex] f'(0)=2 \quad &\Rightarrow & 2a\cdot(0)+b &= 2 & \\ &\Leftrightarrow & b &= 2 & (3) \end{aligned}$$

4. Genaue Funktionsgleichung berechnen.
   Aus den Bedingungen (1) – (3) ergibt sich das folgende LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 4a & - & 2b & + & c & = & 1 \\ \text{II} & -4a & + & b & & & = & 0 \\ \text{III} & & & b & & & = & 2 \end{array}$$

   Löst man das LGS, ergibt sich: $a=\frac{1}{2}; b=2; c=3$.
   Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$
5. Überprüfung der hinreichenden Bedingungen nicht vergessen.

b) zweiten Grades, deren Graph durch die Punkte $A(-1 \mid 0)$, $B(0 \mid -2)$ und $C(2 \mid 1)$.

1. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.
   Da wir eine Funktion zweiten Grades suchen, benutzen wir folgende allg. Funktionsgleichungen:

   $f(x)=ax^2+bx+c$

   $f'(x)=2ax+b$
2. Bedingungen für neue Funktion formulieren. Wir benötigen 3 Bedingungen:

$$\begin{array}{lcrcr} \text{geht durch } A(-1 \mid 0) & \Rightarrow & f(-1) & = & 0 \\ \text{geht durch } B(0 \mid -2) & \Rightarrow & f(0) & = & -2 \\ \text{geht durch } C(2 \mid 1) & \Rightarrow & f(2) & = & 1 \end{array}$$

3. Bedingungen in allg. Funktionsgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} f(-1)=0 \quad &\Rightarrow & a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & a-b+c &= 0 & (1) \\[1ex] f(0)=-2 \quad &\Rightarrow & a\cdot(0)^2+b\cdot(0)+c &= -2 & \\ &\Leftrightarrow & c &= -2 & (2) \\[1ex] f(2)=1 \quad &\Rightarrow & a\cdot(2)^2+b\cdot(2)+c &= 1 & \\ &\Leftrightarrow & 4a+2b+c &= 1 & (3) \end{aligned}$$

4. Genaue Funktionsgleichung berechnen.
   Aus den Bedingungen (1) – (3) ergibt sich das folgende LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & a & - & b & + & c & = & 0 \\ \text{II} & & & & & c & = & -2 \\ \text{III} & 4a & + & 2b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Löst man das LGS, ergibt sich: $a = \frac{7}{6}; b = -\frac{5}{6}; c = -2$.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2$

5. Überprüfung der hinreichenden Bedingungen nicht nötig.

c) dritten Grades, deren Graph den Wendepunkt WP(1 | 1) und den Hochpunkt HP(0 | 3) besitzt.

1. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.

   Da wir eine Funktion dritten Grades suchen, benutzen wir folgende allg. Funktionsgleichungen:

   $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

   $f''(x) = 6ax + 2b$

2. Bedingungen für neue Funktion formulieren. Wir benötigen 4 Bedingungen:

Wendepunkt bei WP(1 | 1)	$\Rightarrow$	$f(1)$	=	1
Krümmung in WP gleich Null	$\Rightarrow$	$f''(1)$	=	0
Hochpunkt bei HP(0 | 3)	$\Rightarrow$	$f(0)$	=	3
Steigung im Hochpunkt gleich Null	$\Rightarrow$	$f'(0)$	=	0

3. Bedingungen in allg. Funktionsgleichung einsetzen.

$$
\begin{array}{llrcll}
f(1) = 1 & \Rightarrow & \multicolumn{4}{l}{a \cdot (1)^3 + b \cdot (1)^2 + c \cdot (1) + d = 1} \\
 & \Leftrightarrow & a + b + c + d & = & 1 & (1) \\
f''(1) = 0 & \Rightarrow & 6a \cdot (1) + 2b & = & 0 & \\
 & \Leftrightarrow & 6a + 2b & = & 0 & (2) \\
f(0) = 3 & \Rightarrow & a \cdot (0)^3 + b \cdot (0)^2 + c \cdot (0) + d & = & 3 & \\
 & \Leftrightarrow & d & = & 3 & (3) \\
f'(0) = 0 & \Rightarrow & 3a \cdot (0)^2 + 2b \cdot (0) + c & = & 0 & \\
 & \Leftrightarrow & c & = & 0 & (4)
\end{array}
$$

4. Genaue Funktionsgleichung berechnen.

   Aus den Bedingungen (1) – (4) ergibt sich das folgende LGS:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{I} & a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\
\text{II} & 6a & + & 2b & & & & & = & 0 \\
\text{III} & & & & & & & d & = & 3 \\
\text{IV} & & & & & c & & & = & 0
\end{array}
$$

   Löst man das LGS, ergibt sich: $a = 1; b = -3; c = 0; d = 3$.

   Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

5. Überprüfung der hinreichenden Bedingungen nicht vergessen.

d) vierten Grades, die achsensymmetrisch zur y-Achse ist, den Tiefpunkt TP(1 | −1) besitzt und durch den Punkt $P(3 \mid 1)$ verläuft.

1. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.

   Da wir eine Funktion vierten Grades suchen, benutzen wir folgende allg. Funktionsgleichungen:

   $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

   $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

2. Bedingungen für neue Funktion formulieren. Wir benötigen 5 Bedingungen, können aber nur 4 aufstellen:

Achsensymmetrie zur y-Achse	$\Rightarrow$	$f(-x)$	$=$	$f(x)$
Tiefpunkt bei TP$(1 \mid -1)$	$\Rightarrow$	$f(1)$	$=$	-1
Steigung im Tiefpunkt gleich Null	$\Rightarrow$	$f'(1)$	$=$	0
geht durch $P(3 \mid 1)$	$\Rightarrow$	$f(3)$	$=$	1

3. Bedingungen in allg. Funktionsgleichung einsetzen.

$$
\begin{array}{llrcll}
f(-x) = f(x) & \Rightarrow & a - b + c - d + e & = & a + b + c + d + e & \\
 & \Leftrightarrow & -2b - 2d & = & 0 & (1) \\
f(1) = -1 & \Rightarrow & a \cdot (1)^4 + b \cdot (1)^3 + c \cdot (1)^2 + d \cdot (1) + e & = & -1 & \\
 & \Leftrightarrow & a + b + c + d + e & = & -1 & (2) \\
f'(1) = 0 & \Rightarrow & 4a \cdot (1)^3 + 3b \cdot (1)^2 + 2c \cdot (1) + d & = & 0 & \\
 & \Leftrightarrow & 4a + 3b + 2c + d & = & 0 & (3) \\
f(3) = 1 & \Rightarrow & a \cdot (3)^4 + b \cdot (3)^3 + c \cdot (3)^2 + d \cdot (3) + e & = & 1 & \\
 & \Leftrightarrow & 81a + 27b + 9c + 3d + e & = & 1 & (4)
\end{array}
$$

4. Genaue Funktionsgleichung berechnen.

   Aufgrund der Achsensymmetrie (siehe (1)) muss gelten: $b = d = 0$.
   Aus den Bedingungen (2) – (4) ergibt sich das folgende lösbare LGS:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & a & + & c & + & e & = & -1 \\
\text{II} & 4a & + & 2c & & & = & 0 \\
\text{III} & 81a & + & 9c & + & e & = & 1
\end{array}
$$

   Löst man das LGS, ergibt sich: $a = \frac{1}{32}; b = 0; c = -\frac{1}{16}; d = 0, e = -\frac{31}{32}$.
   Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{31}{32}$

5. Überprüfung der hinreichenden Bedingungen nicht vergessen.

zu Aufgabe 33: Zwei Straßen lassen sich näherungsweise durch die Funktionen $f(x) = -x^2 - 4x - 6$ und $g(x) = x^2 - 6x + 12$ beschreiben. Eine Einheit steht dabei für 50 m. Die Straßen sollen durch eine neue Straße miteinander verbunden werden. Die neue Straße soll vom Punkt $A(-3 \mid -3)$ zum Punkt $B(4 \mid 4)$ jeweils ruckfrei in die vorhandenen Straßen übergehen.

Bestimme eine Funktionsgleichung, die die genannten Bedingungen erfüllt und zeichne eine Skizze des Graphen in die Zeichnung.

Wir müssen eine Funktion dritten Grades herausfinden, denn durch eine Funktion ersten oder zweiten Grades könnte die Bedingung, dass der Übergang ruckfrei ist, nicht eingehalten werden.

Ruckfrei bedeutet, dass die Steigung von den vorhandenen Graphen und dem neuen Graphen, in den Punkten gleich sind.

Wir berechnen zunächst die Steigung von $f(x)$ im Punkt A und die Steigung von $g(x)$ im Punkt B:

$$f'(-3) = 2 \qquad \text{und} \qquad g'(4) = 2$$

1. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.

   Da wir eine Funktion dritten Grades suchen, benutzen wir folgende allg. Funktionsgleichungen:

$$\begin{array}{lcccccccc} f(x) & = & ax^3 & + & bx^2 & + & cx & + & d \\ f'(x) & = & 3ax^2 & + & 2bx & + & c & & \end{array}$$

2. Bedingungen für neue Funktion formulieren.

$$\begin{array}{llrcr} \text{Punkt } A \text{ ist identisch} & \Rightarrow & h(-3) & = & -3 \\ \text{Steigung in } A \text{ ist identisch} & \Rightarrow & h'(-3) & = & 2 \\ \text{Punkt } B \text{ ist identisch} & \Rightarrow & h(4) & = & 4 \\ \text{Steigung in } B \text{ ist identisch} & \Rightarrow & h'(4) & = & 2 \end{array}$$

3. Bedingungen in allg. Funktionsgleichung einsetzen.

$$\begin{array}{llrcrl} h(-3) = -3 & \Rightarrow & a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d & = & -3 & \\ & \Leftrightarrow & -27a + 9b - 3c + d & = & -3 & (1) \\ h'(-3) = 2 & \Rightarrow & 3a \cdot (-3)^2 + 2b \cdot (-3) + c & = & 2 & \\ & \Leftrightarrow & 27a - 6b + c & = & 2 & (2) \\ h(4) = 4 & \Rightarrow & a \cdot (4)^3 + b \cdot (4)^2 + c \cdot (4) + d & = & 4 & \\ & \Leftrightarrow & 64a + 16b + 4c + d & = & 4 & (3) \\ h'(4) = 2 & \Rightarrow & 3a \cdot (4)^2 + 2b \cdot (4) + c & = & 2 & \\ & \Leftrightarrow & 48a + 8b + c & = & 2 & (4) \end{array}$$

4. Genaue Funktionsgleichung berechnen.

   Aus den Bedingungen (1) – (4) ergibt sich das folgende LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{I} & -27a & + & 9b & - & 3c & + & d & = & -3 \\ \text{II} & 27a & - & 6b & + & c & & & = & 2 \\ \text{III} & 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 4 \\ \text{IV} & 48a & + & 8b & + & c & & & = & 2 \end{array}$$

   Löst man das LGS, ergibt sich: $a = \frac{2}{49}; b = -\frac{3}{49}; c = \frac{26}{49}; d = \frac{12}{49}$.

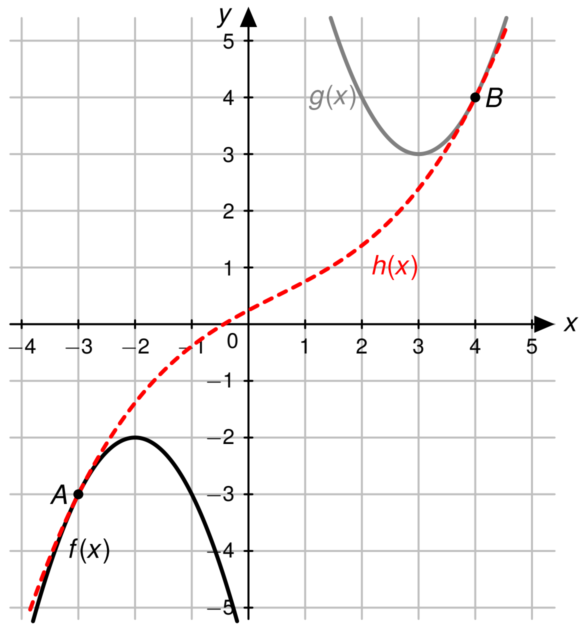
   Die Werte werden dann in die allg. Funktionsgleichung eingesetzt:

$$h(x) = \frac{2}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2 + \frac{26}{49}x + \frac{12}{49}$$

5. Überprüfung der hinreichenden Bedingung nicht nötig.

Hinweis:

Die zweite (2) und vierte (4) Bedingung sorgt dafür, dass der Übergang der Funktionen ruckfrei ist. An den Stellen muss also die Steigung des neuen Graphen mit den Steigungen des alten übereinstimmen.

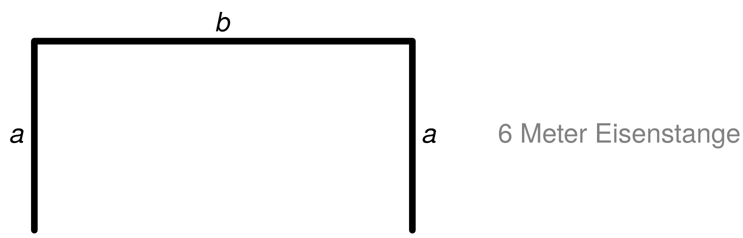


A.10 zu Extremwertprobleme

zu Aufgabe 34: Zwei Eltern möchten für ihr Kind ein Fußballtor bauen. Dazu haben sie eine sechs Meter lange Eisenstange gekauft.

Welche Maße muss das Tor besitzen, um eine möglichst große „Torfläche“ zu haben?

1. Skizze anfertigen.



2. Hauptbedingung aufstellen.

   Der Flächeninhalt vom Tor soll maximiert werden.

$$\text{Hauptbedingung:} \quad A = a \cdot b$$

3. Nebenbedingungen formulieren & Zielfunktion bestimmen.

   Als Einschränkung und damit als Nebenbedingung müssen wir beachten, dass 6 Meter Material zur Verfügung steht:

$$\text{Nebenbedingung:} \quad 2a + b = 6 \text{ [m]}$$

Wir stellen diese Formel nun nach einer der beiden Variablen um, damit wir sie in die Hauptbedingung einsetzen können und diese dann nur noch von einer Variablen abhängt:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 6 \qquad | -2a \\ \Leftrightarrow \quad b &= 6 - 2a \end{aligned}$$

Lösung in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ziefunktion:} \quad A(a) &= a \cdot \overbrace{(6 - 2a)}^{=b} \\ &= -2a^2 + 6a \end{aligned}$$

4. Maximum / Minimum berechnen.

   1. Die erste und zweite Ableitung von $A(a)$ berechnen:

   $$A'(a) = -4a + 6 \qquad \text{und} \qquad A''(a) = -4$$

   2. Notwendige Bedingung: $A'(a) = 0$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -4a + 6 &= 0 \qquad | -6 \\ \Leftrightarrow \quad -4a &= -6 \qquad |: (-4) \\ \Leftrightarrow \quad a &= 1{,}5 \end{aligned}$$

   3. Hinreichende Bedingung: $A'(a) = 0 \wedge A''(a) \neq 0$

   $$A''(1{,}5) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

   4. y-Wert des Extrempunktes berechnen:

   $$A(1{,}5) = 4{,}5 \Rightarrow \text{HP } (1{,}5 \mid 4{,}5)$$

   Der Flächeninhalt des Tores ist also maximal, wenn die Seite a (Pfosten des Tores) eine Länge von 1,5 Metern hat. Er beträgt dann 4,5 m^2.

   Nun müssen wir noch berechnen, wie groß die Seite b ist. Dazu setzen wir einfach unser Ergebnis in die Nebenbedingung ein:

   $$b = 6 - 2 \cdot (1{,}5) = 3 \text{ m}$$

   Die Seite b (die Latte des Tores) ist 3 Meter lang, wenn der Flächeninhalt maximal sein soll.

5. Ränder überprüfen.

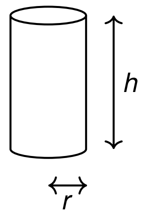
   Die Randwerte $a = 0$ und $a = 3$ machen keine Probleme, da gilt: $A(0) = 0$) und $A(3) = 0$.

zu Aufgabe 35: Ein Getränkehersteller überlegt, ob er sein neues Getränk lieber in einem zylinderförmigen oder in einem quaderförmigen Trinkpäckchen mit quadratischer Grundfläche verkaufen soll. Egal für welche Form er sich entscheidet, beide Varianten sollen aus Umweltschutzgründen in einer Kartonverpackung kommen. Für eine Verpackung stehen jeweils 300 cm^2 Material zur Verfügung.

Berechne, welche der beiden Formen mehr Inhalt fassen kann. Würdest du dem Hersteller die jeweiligen Formen mit maximalem Volumen empfehlen?

a) Zylinderförmig:

1. Skizze anfertigen.



max. Volumen, nur 300 cm^2 Material

2. Hauptbedingung aufstellen.
   Das Volumen des Zylinders soll maximiert werden.

$$\text{Hauptbedingung:}\quad V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

3. Nebenbedingungen formulieren & Zielfunktion bestimmen.
   Als Einschränkung und damit als Nebenbedingung müssen wir beachten, dass 300 cm^2 als Materialoberfläche zur Verfügung steht.

Exkurs: Oberfläche eines Zylinders

$$O = M + 2 \cdot G = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Mit M als Mantelfläche und G als Grundfläche.

$$\text{Nebenbedingung:}\quad 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) = 300\ [\mathrm{m}^2]$$

Wir stellen diese Formel nun nach einer der beiden Variablen um, damit wir sie in die Hauptbedingung einsetzen können und diese dann nur noch von einer Variablen abhängt:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) &=& \ 300 \qquad | \div (2\pi r);\ -r \\ \Leftrightarrow\ & h &=& \ \tfrac{300}{2\pi r} - r \end{aligned}$$

Lösung in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ziefunktion:}\quad V(r) &= \pi \cdot r^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{300}{2\pi r} - r\right)}^{=h} \\ &= -\pi \cdot r^3 + 150r \end{aligned}$$

4. Maximum / Minimum berechnen.
   1. Die erste und zweite Ableitung von $V(r)$ berechnen:

$$V'(r) = -3\pi r^2 + 150 \qquad \text{und} \qquad V''(r) = -6\pi r$$

   2. Notwendige Bedingung: $V'(r) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ && -3\pi r^2 + 150 &= 0 && | -150 \\ \Leftrightarrow\ && -3\pi r^2 &= -150 && | \div(-3\pi) \\ \Leftrightarrow\ && r^2 &= \tfrac{150}{3\pi} && | \pm\sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ && r_1 \approx 3{,}99 &\ \vee\ r_2 \approx -3{,}99 && \end{aligned}$$

Der negative Wert fällt im Kontext raus, da der Radius nicht negativ sein kann.

3. Hinreichende Bedingung: $V'(r) = 0 \wedge V''(r) \neq 0$

$$V''(3{,}99) \approx -75{,}2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

4. y-Wert des Extrempunktes berechnen:

$$V(3{,}99) \approx 399 \Rightarrow \text{HP } (3{,}99 \mid 399)$$

Die Zielfunktion hat also ein Maximum bei $r \approx 3{,}99$ cm.
h hat in diesem Fall die Länge $h = \frac{300}{2\pi r} - r \approx \frac{300}{2\pi \cdot (3{,}99)} - 3{,}99 \approx 7{,}98$ cm.

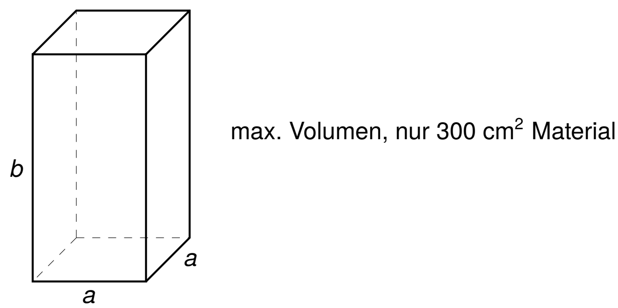
5. Ränder überprüfen.
   Die Randwerte $r = 0$ und $r \approx 6{,}91$ machen keine Probleme, da gilt: $V(0) = 0$ und $V(6{,}91) \approx 0$.

Antwort:
Die zylinderförmige Verpackung hat also ein maximales Volumen, wenn $r \approx 3{,}99$ cm und $h \approx 7{,}98$ cm sind. Das Volumen beträgt dann $V(3{,}99) \approx 399$ cm^3.

Zu empfehlen sind diese Maße allerdings nicht, da es sich um einen sehr breiten und wenig hohen Zylinder handelt, der als Getränkeverpackung eher ungeeignet ist.

b) Quaderförmig mit quadratischer Grundfläche:

1. Skizze anfertigen.



2. Hauptbedingung aufstellen.
   Das Volumen des Quaders mit quadratischer Grundfläche soll maximiert werden.

$$\text{Hauptbedingung:} \quad V = a^2 \cdot b$$

3. Nebenbedingungen formulieren & Zielfunktion bestimmen.
   Als Einschränkung und damit als Nebenbedingung müssen wir beachten, dass 300 cm^2 als Materialoberfläche steht.

Exkurs: Oberfläche eines Quaders mit quadratischer Grundfläche

$$O = M + 2 \cdot G = 4ab + 2a^2$$

Mit M als Mantelfläche und G als Grundfläche.

$$\text{Nebenbedingung:} \quad 2a^2 + 4ab = 300 \ [\text{m}^2]$$

Wir stellen diese Formel nun nach einer der beiden Variablen um, damit wir sie in die Hauptbedingung einsetzen können und diese dann nur noch von einer Variablen abhängt:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 4ab &= 300 \qquad | -2a^2;\ \div(4a) \text{ für } a \neq 0 \\ \Leftrightarrow \qquad b &= \tfrac{75}{a} - \tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

Lösung in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ziefunktion:} \quad V(a) &= a^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{75}{a} - \frac{1}{2}a\right)}^{=b} \\ &= -\tfrac{1}{2}a^3 + 75a \end{aligned}$$

4. Maximum / Minimum berechnen.
   1. Die erste und zweite Ableitung von $V(a)$ berechnen:

      $$V'(a) = -\frac{3}{2}a^2 + 75 \qquad \text{und} \qquad V''(a) = -3a$$

   2. Notwendige Bedingung: $V'(a) = 0$

      $$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -\tfrac{3}{2}a^2 + 75 &= 0 \qquad | -75 \\ \Leftrightarrow \quad -\tfrac{3}{2}a^2 &= -75 \qquad | \div\left(-\frac{3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad a^2 &= 50 \qquad | \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad a_1 \approx 7{,}07 &\vee a_2 \approx -7{,}07 \end{aligned}$$

      Der negative Wert fällt im Kontext raus, da der Radius nicht negativ sein kann.
   3. Hinreichende Bedingung: $V'(a) = 0 \wedge V''(a) \neq 0$

      $$V''(7{,}07) \approx -21{,}2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

   4. y-Wert des Extrempunktes berechnen:

      $$V(7{,}07) \approx 354 \Rightarrow \text{HP } (7{,}07 \mid 354)$$

   Die Zielfunktion hat also ein Maximum bei $a \approx 7{,}07$ cm.
   b hat in diesem Fall die Länge $b \approx \frac{75}{(7{,}07)} - \frac{1}{2} \cdot (7{,}07) \approx 7{,}07(\text{ cm})$.
5. Ränder überprüfen.
   Die Randwerte $a = 0$ und $a \approx 12{,}25$ machen keine Probleme, da gilt: $V(0) = 0$ und $V(12{,}25) \approx 0$.

Antwort:
Die quaderförmige Verpackung hat also ein maximales Volumen, wenn $a \approx 7{,}07$ cm und $b \approx 7{,}07$ cm sind. Das Volumen beträgt dann $V(7{,}07) \approx 354$ cm^3.

Zu empfehlen sind diese Maße allerdings nicht, da es sich um einen Würfel handelt, der als Getränkeverpackung eher ungeeignet ist.

Fazit:
Insgesamt weist die zylinderförmige Verpackung also mit ca. 399 cm^3 ein größeres Volumen auf und kann damit mehr Inhalt fassen.

zu Aufgabe 36: Aus einem Spiegel, der einen Meter breit und zwei Meter hoch ist, ist eine Ecke rausgebrochen. Die rausgebrochene Ecke kann in etwa mit der Funktion $f(x) = 4x^2 + 1{,}5$ beschrieben werden. Berechne, wie man ein möglichst großes rechteckiges Stück aus dem Spiegel schneiden könnte, das man dann weiterhin als Spiegel benutzt.

1. Skizze anfertigen.

   Schon in der Aufgabenstellung gegeben.

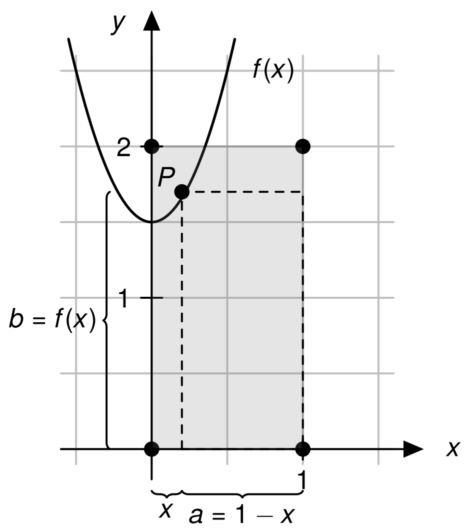
2. Hauptbedingung aufstellen.

   Wir wollen ein Rechteck aus dem Spiegel schneiden, dass einen möglichst großen Flächeninhalt hat.

   $$\text{Hauptbedingung:} \quad A = a \cdot b$$

3. Nebenbedingungen formulieren & Zielfunktion bestimmen.

   Die Nebenbedingung ist in unserem Fall, dass die Ecke aus dem Spiegel ausgebrochen ist und die das Rechteck dort angrenzt. Unser Ziel ist es nun die Werte a und b durch Werte aus dem Koordinatensystem / vom Graphen zu ersetzen. Dazu ein Beispiel:



   Sagen wir, wir wollen den Flächeninhalt des Rechtecks berechnen, das an den Punkt P angrenzt. Wie können wir dann die Breite des Spiegels (also a) durch Werte aus dem Koordinatensystem (also x und y) ausdrücken?

   $$\text{Breite:} \quad a = 1 - x$$

   Warum? Der Spiegel ist nämlich maximal einen Meter breit und von diesem Meter wird der x-Wert des Punktes, an dem das Rechteck anliegt, abgezogen.

   Und wie können wir die Höhe des Spiegels (also b), durch Werte aus dem Koordinatensystem (also x und y) ausdrücken?

   $$\text{Höhe:} \quad b = y = f(x) = 4x^2 + 1{,}5$$

Die Höhe des Rechtecks entspricht nämlich dem y-Wert des Punktes, an dem es anliegt. Und da dieser Punkt immer auf dem Graphen $f(x)$ liegt, können wir seinen y-Wert durch die Funktionsgleichung von $f(x)$ ausdrücken. Denn mit der Funktionsgleichung berechnet man ja den y-Wert eines Punktes, der auf dem Graphen liegt.

Damit haben wir im Grunde zwei Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Nebenbedingungen:} \quad a &= 1 - x && (1) \\ b &= 4x^2 + 1{,}5 && (2) \end{aligned}$$

Lösung in die Hauptbedingung einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ziefunktion:} \quad A(x) &= \overbrace{(1-x)}^{=a} \cdot \overbrace{(4x^2 + 1{,}5)}^{=b} \\ &= 4x^2 + 1{,}5 - 4x^3 - 1{,}5x \\ &= -4x^3 + 4x^2 - 1{,}5x + 1{,}5 \end{aligned}$$

4. Maximum / Minimum berechnen.

   1. Die erste und zweite Ableitung von $A(x)$ berechnen:

   $$A'(x) = -12x^2 + 8x - 1{,}5 \qquad \text{und} \qquad A''(x) = -24x + 8$$

   2. Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow \quad -12x^2 + 8x - 1{,}5 &= 0 \quad \mid \div(-12);\ pq\text{-Formel} \\ &\lightning \text{ keine Lösung} \end{aligned}$$

   Die Funktion besitzt also keinen Hochpunkt. Dadurch muss die Lösung an den Rändern des Definitionsbereiches liegen. Also ergibt sich entweder ein maximaler Flächeninhalt, wenn wir das Rechteck an der linken Ecke der abgebrochenen Stelle anlegen oder an der rechten.

5. Ränder überprüfen.

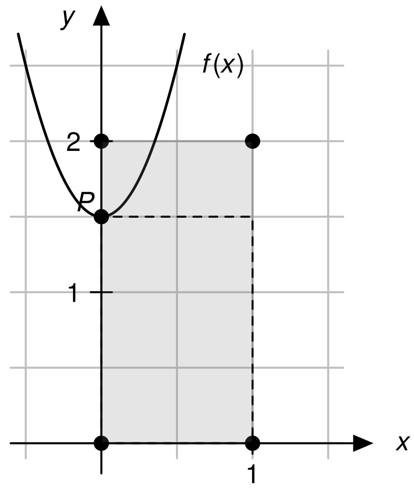
   - Linker Rand:
     Hier gilt $x = 0$, also $A(0) = 1{,}5$ [m^2]
   - Rechter Rand:
     Hier berechnen wir zuerst, wo der rechte Teil der abgebrochenen Ecke am Spiegel endet:

     $$f(x) = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 1{,}5 = 2 \Leftrightarrow x \approx \pm 0{,}354$$

     Die negative Lösung ist im Kontext nicht wichtig, deshalb betrachten wir:

     $$A(0{,}354) \approx 1{,}29 \text{ [m}^2\text{]}$$

Damit ist der Flächeninhalt des Rechtecks maximal, wenn man es an der linken Ecke des abgebrochenen Spiegels ansetzt und eine Breite von 1 Meter und eine Höhe von 1,5 Metern hat.



A.11 zu Exponentielle Wachstumsprozesse

zu Aufgabe 37: Aktuell leben auf der Erde ca. 7,94 Milliarden Menschen. Pro Jahr wächst die Weltbevölkerung um ca. $1,09\%$ – Tendenz sinkend.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die oben beschriebene Situation darstellt. Vernachlässige, dass die Tendenz sinkend ist.

Startwert:	7.940.000.000	$\Rightarrow f(t) = 7.940.000.000 \cdot 1{,}0109^t$
Wachstumsfaktor:	1,0109	

b) Berechne, wie viele Menschen laut dieser Modellierung in 10 Jahren auf der Erde leben werden und in wie viel Jahren 10 Milliarden Menschen auf der Erde leben werden.

- In 10 Jahren $\rightarrow$ Für t eine 10 einsetzen:

$$f(10) = 7.940.000.000 \cdot 1{,}0109^{(10)} = 8.849.168.564$$

In 10 Jahren wären also 8.849.168.564 auf der Erde.

- Wann 10 Milliarden? $\rightarrow$ Funktion gleich 10 Milliarden setzen:

$$\begin{array}{lrcll} & 7.940.000.000 \cdot 1{,}0109^t & = & 10.000.000.000 & \mid \div 7.940.000.000 \\ \Leftrightarrow & 1{,}0109^t & = & 1{,}25945 & \mid \log \\ \Leftrightarrow & t & = & \log_{1{,}0109}(1{,}25945) = 21{,}278 & \end{array}$$

Nach etwas mehr als 21 Jahren werden laut dieser Modellierung also 10 Milliarden Menschen auf der Erde leben.

c) Berechne, vor wie vielen Jahren die Eine-Milliarde-Marke geknackt wurde.

Das Vorgehen ist das Gleiche wie in der Teilaufgabe zuvor, hier werden wir allerdings einen negativen Wert für t herausbekommen, da das Ereignis in der Vergangenheit liegt.

$$\begin{array}{lrcll} & 7.940.000.000 \cdot 1{,}0109^t & = & 1.000.000.000 & \mid \div 7.940.000.000 \\ \Leftrightarrow & 1{,}0109^t & = & 0{,}125945 & \mid \log \\ \Leftrightarrow & t & = & \log_{1{,}0109}(0{,}125945) = -191{,}118 & \end{array}$$

Vor rund 191 Jahren wurde also laut dieser Modellierung die Eine-Milliarde-Marke geknackt.

d) Tatsächlich wurde diese Marke um das Jahr 1800 durchbrochen. Gehe davon aus, dass im Jahr 1800 genau eine Milliarde Menschen auf der Erde gelebt haben und berechne, um wie viel Prozent die Weltbevölkerung bis heute (2022) jährlich gewachsen ist, wenn man dem Ganzen exponentielles Wachstum zugrunde legt.

Wir machen es uns einfach und wählen als „Zeitpunkt Null" das Jahr 1800. Zu diesem Zeitpunkt gab es eine Milliarde Menschen auf der Erde:

I) $a = 1.000.000.000$

Als zweite Information nutzen wir die aktuelle Weltbevölkerung 222 Jahre später:

II) $1.000.000.000 \cdot q^{222} = 7.940.000.000$

Diese Gleichung lösen wir nun nach q auf und erhalten so den Wachstumsfaktor:

$$\begin{aligned} 1.000.000.000 \cdot q^{222} &= 7.940.000.000 && \mid \div 1.000.000.000 \\ \Leftrightarrow \quad q^{222} &= 7{,}94 && \mid \pm \sqrt[222]{} \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir $q_{1,2} \approx \pm 1{,}00938$. Die negative Lösung macht natürlich im Kontext keinen Sinn, weshalb die Antwort lautet, dass die Weltbevölkerung mit den Daten durchschnittlich um rund 0,938% pro Jahr gewachsen ist.

zu Aufgabe 38: Ein Seifenhersteller wirbt damit, dass die Seife eine gewisse Prozentzahl der Bakterien abtötet, wenn man einmal mit ihr wäscht. Nach einem Mal Waschen befinden sich noch 10.000.000 Bakterien an Annelieses Händen, nach dem dritten Mal waschen noch 1.000.

a) Bestimme eine e-Funktion, mit der man die Anzahl der Bakterien nach beliebig vielen Waschgängen bestimmen kann. Runde, falls notwendig, beim Startwert großzügig.

Wir suchen eine Funktion der Form $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$.
Mithilfe der Infos aus der Aufgabenstellung stellen wir zwei Bedingungen auf, die die Funktion erfüllen muss.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad a \cdot e^{k \cdot (1)} &= 10.000.000 \\ \text{II)} \quad a \cdot e^{k \cdot (3)} &= 1.000 \end{aligned}$$

Mithilfe der Bedingungen berechnen wir nun die Werte für a und k.

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad a \cdot e^{k \cdot 3} &= 1.000 \\ \Leftrightarrow \quad a &= \tfrac{1000}{e^{3k}} \end{aligned}$$

Den Wert für a in I) einsetzen:

$$\begin{aligned} a \text{ in I):} \quad \tfrac{1.000}{e^{3k}} \cdot e^{k} &= 10.000.000 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1.000}{e^{2k}} &= 10.000.000 \\ \Leftrightarrow \quad k &= \tfrac{\ln\left(\frac{1.000}{10.000.000}\right)}{2} \\ \Leftrightarrow \quad k &\approx -4{,}60517 \end{aligned}$$

Den Werte für k setzen wir in a ein, da der Parameter noch von k abhängt:

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1000}{e^{(-4{,}60517) \cdot 3}} \approx 1.000.000.000$$

Die Funktion lautet also: $f(t) = 1.000.000.000 \cdot e^{-4{,}60517 \cdot t}$

b) Wie viel Prozent der Bakterien werden pro Waschgang abgetötet? Da t die Anzahl der Waschgänge angibt, setzen wir $t = 1$ ein und berechnen den Wachstumsfaktor q:

$$\Rightarrow \quad q = e^k \Leftrightarrow q = e^{-4{,}60517 \cdot 1} = 0{,}01$$

Pro Waschgang werden also 99% der Bakterien abgetötet.

c) Berechne, wann sich keine, also Null, Bakterien mehr an Annelieses Händen befinden.

Wir möchten wissen, wann $f(t) = 0$ ist. Die Gleichung $1.000.000.000 \cdot e^{-4{,}60517 \cdot t}$ hat aber keine Lösung, da die e-Funktion nie Null wird. Daraus würde man schließen, dass es nie „Null“ Bakterien werden.

d) Erläutere, worin das Problem bei der Lösung der Aufgabe c) liegt und liefere begründet eine zufriedenstellendere Lösung.

Das Problem in der Aufgabe c) liegt darin, dass bei jedem neuen Waschgang wieder 99% der vorhandenen Bakterien abgetötet werden, also immer nur ein Anteil der noch vorhanden Bakterien abgetötet wird, nie aber alle Bakterien. Das führt dazu, dass sich die Anzahl der Bakterien der Null annähert, sie aber nie annimmt.

Beim zweiten Teil der Aufgabe gibt es keine „falsche“ Lösung, nur sinnvolle und keine sinnvollen Lösungen. Es kommt bei dieser Aufgabe also ganz auf die Erklärung von dir an, warum deine Rechnung sinnvoll ist.

Eine sinnvolle Lösung könnte zum Beispiel sein:
Man berechnet, nach wie vielen Waschgängen noch ein Bakterium vorhanden ist, wann die Funktion also den Wert 1 annimmt. Nach diesem Zeitpunkt nimmt die Funktion nur noch Kommazahlen an, die kleiner als 1 sind. Es gibt allerdings nur ganze Bakterien, weshalb Kommazahlen, die kleiner als 1 sind, im Kontext keinen Sinn machen und man davon ausgehen kann, dass dann keine Bakterien mehr vorhanden sind.

$$\begin{array}{rrcll}
 & 1.000.000.000 \cdot e^{-4{,}60517 \cdot t} & = & 1 & \mid \div 1.000.000.000 \\
\Leftrightarrow & e^{-4{,}60517 \cdot t} & = & \frac{1}{1.000.000.000} & \mid \ln \\
\Leftrightarrow & -4{,}60517t & = & \ln\left(\frac{1}{1.000.000.000}\right) & \mid \div(-4{,}60517) \\
\Leftrightarrow & t & = & 4{,}5 &
\end{array}$$

Man kann also davon ausgehen, dass nach dem fünften Mal Händewaschen keine Bakterien mehr an den Händen sind.

A.12 zu Integralrechnung & Rotationskörper

zu Aufgabe 39: Gib jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = x$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = 1$ $\rightarrow F(x) = x$

c) $f(x) = 4x^3$ $\rightarrow F(x) = x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}x^{-2}$ $\rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}x^{-1} = -\frac{1}{2x}$

e) $f(x) = \frac{x^5+1}{x^3} = \frac{x^5}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x^2 + x^{-3}$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2x^2}$

f) $f(x) = 5x^2 - 3x + 12$ $\rightarrow F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 12x$

g) $f(x) = 6 \cdot \cos(x)$ $\rightarrow F(x) = 6 \cdot \sin(x)$

h) $f(x) = \frac{1}{x^4} - \sin(x) = x^{-4} - \sin(x)$ $\rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} + \cos(x) = -\frac{1}{3x^3} + \cos(x)$

i) $f(x) = 0$ $\rightarrow F(x) = 3$ (oder irgendeine andere Zahl)

zu Aufgabe 40:
Weise nach, dass $F(x) = \left(2x^2 - 2x + 1\right) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = 4x^2 \cdot e^{2x}$ ist.

Bei solchen Aufgaben müssen wir zeigen, dass $f(x)$ rauskommt, wenn man $F(x)$ ableitet:

$$F'(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x} + 2 \cdot e^{2x} \cdot \left(2x^2 - 2x + 1\right) = e^{2x} \cdot (4x - 2 + 4x^2 - 4x + 2) = 4x^2 \cdot e^{2x} = f(x)$$

Damit ist F eine Stammfunktion von f.

zu Aufgabe 41: Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^3 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot (3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (1)^2 = 4$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} 2x^4 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^5\right]_{-1}^{-1} = 0$

c) $\displaystyle\int_0^2 \left(t^3 - t\right) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot (2)^4 - \frac{1}{2} \cdot (2)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (0)^4 - \frac{1}{2} \cdot (0)^2\right) = 2$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 2 \, \mathrm{d}x = [2x]_{-1}^1 = 2 \cdot (1) - 2 \cdot (-1) = 4$

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 -5x^3 \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{4}x^4\right]_{-2}^2 = -\frac{5}{4} \cdot (2)^4 - \left(-\frac{5}{4} \cdot (-2)^4\right) = 0$

f) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(4x^3 - 12x^2 + 2\right) \, \mathrm{d}x = \left[x^4 - 4x^3 + 2x\right]_{-1}^2$
$= \left((2)^4 - 4 \cdot (2)^3 + 2 \cdot (2)\right) - \left((-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) = -15\right.$

g) $\displaystyle\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{1}{3} \cdot (0)^3 = 9$

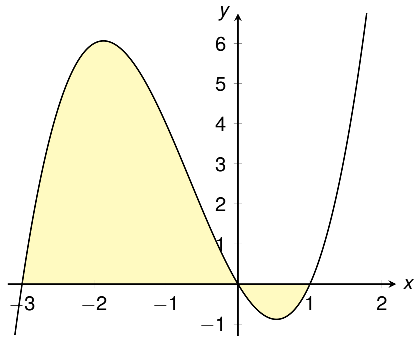
h) $\int_0^5 \left(2x^2 + 7\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 7x\right]_0^5 = \left(\frac{2}{3} \cdot (5)^3 + 7 \cdot (5)\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (0)^3 + 7 \cdot (0)\right) \approx 118{,}33$

i) $\int_1^4 x^3 - e^x\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - e^x\right]_1^4 = \frac{1}{4} \cdot (4)^4 - e^{(4)} - \left(\frac{1}{4} \cdot (1)^4 - e^{(1)}\right) \approx 11{,}8701$

zu Aufgabe 42: Berechne…

a) den Flächeninhalt, den der Graph von $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ mit der x-Achse einschließt.

Hier ist eine Skizze des Graphen hilfreich:



Wir wollen nun die Fläche, die der Graph im Intervall von -3 bis 0 und von 0 bis 1 (Achtung: negative Fläche, die wir in Betragsstriche setzen müssen!) mit der x-Achse einschließt. Normalerweise würden wir jetzt die Nullstellen berechnen (Ausklammern und pq-Formel), aber in der Zeichnung können wir sie direkt ablesen. Sie liegen bei $x = -3$, $x = 0$ und $x = 1$.

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^0 f(x)\, dx + \left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| &= \int_{-3}^0 \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\, dx + \left|\int_0^1 \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\, dx\right| \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^0 + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^1\right| \\
&= \frac{1}{4} \cdot (0)^4 + \frac{2}{3} \cdot (0)^3 - \frac{3}{2} \cdot (0)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-3)^2\right) \\
&+ \left|\frac{1}{4} \cdot (1)^4 + \frac{2}{3} \cdot (1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (1)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (0)^4 + \frac{2}{3} \cdot (0)^3 - \frac{3}{2} \cdot (0)^2\right)\right| \\
&\approx 11{,}25 + |-0{,}5833| \approx 11{,}8333 \text{ [FE]}
\end{aligned}$$

b) $\int_{-3}^1 \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\, dx$ und erkläre an einer Zeichnung des Graphen, wie sich der Wert des Integrals zusammensetzt.

Eine Skizze der Funktion haben wir bereits in a) angefertigt. Wenn man stumpf das Integral berechnen würde, erhält man den Integralwert:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^1 \left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\, dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^1 \\
&= \frac{1}{4} \cdot (1)^4 + \frac{2}{3} \cdot (1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (1)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-3)^2\right) \\
&\approx 10{,}6667
\end{aligned}$$

Hier haben wir den orientierten Flächeninhalt (Integralwert) berechnet. Das heißt die Fläche unter der x-Achse wird als negative Fläche aufgefasst. Der Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse von -3 bis 0 beträgt 11,25 (FE) und davon wird der Flächeninhalt zwischen Graphen und Achse von 0 bis 1 abgezogen, also $-0{,}5833$ (FE).

zu Aufgabe 43: Berechne den Flächeninhalt, der...

a) von $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 5$ und $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + 1$ eingeschlossen wird.

Zuerst berechnen wir die Schnittpunkte der Graphen:

$$\begin{array}{rrcll} & -\frac{1}{4}x^2 - x + 5 & = & \frac{3}{4}x^2 - x + 1 & \mid +\frac{1}{4}x^2; +x; -1 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 4 & \mid \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow & x_1 = 2 & \vee & x_2 = -2 & \end{array}$$

Da es nur zwei Schnittpunkte gibt, muss ein Graph zwischen den Schnittpunkten die ganze Zeit über dem anderen liegen. Um herauszufinden, welcher der Graphen in dem Intervall oben liegt, lässt man sich die Graphen zeichnen oder setzt einen x-Wert aus dem Intervall in beide Funktionen ein und schaut, welcher der Graphen dort den höheren y-Wert annimmt.

Für $x = 0$: $f(0) = 5 > 1 = g(0) \Rightarrow f(x)$ liegt also über $g(x)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{4}x^2 - x + 5\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 - x + 1\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(2)^3 + 4\cdot(2) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2)\right) \approx 10{,}67\ [\text{FE}] \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Fläche, die von den beiden Graphen eingeschlossen wird, beträgt also ca. 10,67 Flächeneinheiten.

b) von den beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1{,}5x + 3$ eingeschlossen wird.

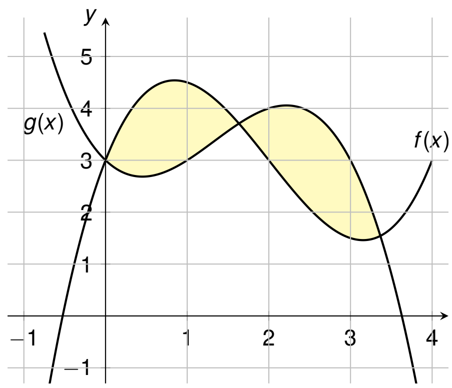
Zuerst berechnen wir wieder die Schnittpunkte der Graphen:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x + 3 & = & -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1,5x + 3 & \mid -3; +1{,}5x; -2x^2; +\frac{1}{2}x^3 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 5x^2 + 5{,}5x & = & 0 & \mid x \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow & x\cdot\left(x^2 - 5x + 5{,}5\right) & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & x^2 - 5x + 5{,}5 = 0 & \mid pq\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow & x_1 = 0 & \vee & x_2 \approx 1{,}634 \vee x_3 \approx 3{,}366 & \end{array}$$

Nun überprüfen wir, welcher Graph im Intervall von 0 bis 1,634 oben liegt und welcher im Intervall von 1,634 bis 3,366. Dazu nehmen wir einen Wert aus dem Intervall und setzen ihn in beide Funktionen ein. Die Funktion, die den größeren y-Wert an der Stelle hat, hat im gesamten Intervall größere y-Werte.

$$\begin{array}{rcrcrcl} f(1) & = & 4{,}5 & > & 3 & = & g(1) \\ f(2) & = & 3 & < & 4 & = & g(2) \end{array}$$

Im ersten Intervall liegt also der Graph von f oben und im zweiten der von g. Hier einmal veranschaulicht:



Um den Flächeninhalt zu bestimmen, rechnen wir also:

$$\int_0^{1,634} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1,634}^{3,366} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$= \int_0^{1,634} \left(\left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x + 3\right) - \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1,5x + 3\right)\right) dx$$

$$+ \int_{1,634}^{3,366} \left(\left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 1,5x + 3\right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x + 3\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{1,634} \left(x^3 - 5x^2 + 5,5x\right) dx + \int_{1,634}^{3,366} \left(-x^3 + 5x^2 - 5,5x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{11}{4}x^2\right]_0^{1,634} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{4}x^2\right]_{1,634}^{3,366}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(1,634)^4 - \frac{5}{3}\cdot(1,634)^3 + \frac{11}{4}\cdot(1,634)^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(0)^4 - \frac{5}{3}\cdot(0)^3 + \frac{11}{4}\cdot(0)^2\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\cdot(3,366)^4 - \frac{5}{3}\cdot(3,366)^3 + \frac{11}{4}\cdot(3,366)^2\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot(1,634)^4 + \frac{5}{3}\cdot(1,634)^3 - \frac{11}{4}\cdot(1,634)^2\right)$$

$$\approx 1,853 + 2,165 = 4,018 \text{ [FE]}$$

Der Flächeninhalt, der von beiden Graphen eingeschlossen wird, beträgt also 4,018 Flächeneinheiten.

zu Aufgabe 44: Untersuche, ob es sich um uneigentliche Integrale handelt.

a) $$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{3}{4x^4}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} \underbrace{-\frac{3}{4a^4}}_{\to 0} - \left(-\frac{3}{4\cdot(1)^4}\right) \to \frac{3}{4}$$

Somit handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

b) $$\int_0^{\infty} -e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a -e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[e^{-x}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty} e^{(-a)} - e^{(0)} = \lim_{a\to\infty} \underbrace{e^{-a}}_{\to 0} - 1 \to -1$$

Somit handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

c) $$\int_0^2 \frac{2}{x^4}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^2 \frac{2}{x^4}\,dx = \lim_{a\to 0} \left[-\frac{2}{3x^3}\right]_a^2 = \lim_{a\to 0} -\frac{2}{3\cdot(2)^3} - \left(-\frac{2}{3a^3}\right) = \lim_{a\to 0} -\frac{1}{12} + \underbrace{\frac{2}{3a^3}}_{\to\infty} \to \infty$$

Das Integral divergiert. Es handelt sich also nicht um ein uneigentliches Integral.

d) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right]_a^3 = \lim_{a\to 0}\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(3)^2} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)}_{\to 0} \to \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{9} \approx 3{,}12$

Somit handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

zu Aufgabe 45: Die Geschwindigkeit eines professionellen 100m-Läufers kann näherungsweise durch die Funktion $f(t) = -\frac{3}{20}t^2 + \frac{12}{5}t + 3$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden an und $f(t)$ die Geschwindigkeit in m/s.

a) Was können wir mit der Funktion noch herausfinden außer die aktuelle Geschwindigkeit des Läufers?

Da uns $f(t)$ die aktuelle Geschwindigkeit des Läufers in m/s angibt, finden wir mit dem Integral die zurückgelegte Strecke des Läufers (in Metern) heraus. Zudem könnte man auch die Veränderung der Geschwindigkeit mit der ersten Ableitung herausfinden.

b) Welche Strecke hat der Läufer nach 5 Sekunden zurückgelegt?

Hierzu berechnen wir das Integral der Funktion im Zeitraum von 0 bis 5.

$$\int_0^5 -\frac{3}{20}t^2 + \frac{12}{5}t + 3\,dt = \left[-\frac{1}{20}t^3 + \frac{12}{10}t^2 + 3t\right]_0^5 \approx 38{,}57$$

Nach 5 Sekunden hat der Läufer ca. 38,75 Meter zurückgelegt.

c) Ein sinnvoller Definitionsbereich für die Aufgabe lautet $[0, 10]$. Deute im Sachkontext, warum dieser Definitionsbereich sinnvoll ist.

$t = 0$ stellt den Beginn des Rennes dar und ist deshalb der Startwert. $t = 10$ ist dann das Ende des Rennens, also der Zeitpunkt, an dem der Läufer die 100 Meter erreicht hat. Der Ausdruck

$$\int_0^{10} f(t)\,dt = 100$$

bestätigt dies.

d) Bestimme, nach wie vielen Sekunden der Läufer die Hälfte der Strecke zurückgelegt hat. Warum ist dies nicht genau nach der Hälfte der Zeit ($t = 5$) der Fall?

Wir berechnen, für welches x folgendes gilt:

$$\int_0^x f(t)\,dt = 50$$

Dann hat der Läufer nämlich 50 Meter, also die Hälfte der Strecke zurückgelegt. Dafür berechnen wir zunächst das allgemeine Integral

$$\begin{aligned}\int_0^x -\frac{3}{20}t^2 + \frac{12}{5}t + 3\,dt &= \left[-\frac{1}{20}t^3 + \frac{12}{10}t^2 + 3t\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{20}x^3 + \frac{12}{10}x^2 + 3x - \left(-\frac{1}{20}\cdot(0)^3 + \frac{12}{10}\cdot(0)^2 + 3\cdot(0)\right) \\ &= -\frac{1}{20}x^3 + \frac{12}{10}x^2 + 3x\end{aligned}$$

und setzen den Ausdruck gleich 50:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{20}x^3 + \tfrac{12}{10}x^2 + 3x &= 50 \quad | -50 \\ \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{20}x^3 + \tfrac{12}{10}x^2 + 3x - 50 &= 0 \quad | \text{ polyroots} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = -6{,}76 \ \vee \ x_2 = 5{,}97 \ \vee \ x_3 &= 24{,}79 \end{aligned}$$

Da x_1 und x_3 außerhalb des Definitionsbereichs liegen, kommt als Lösung nur x_2 in Frage. Er hat also nach 5,97 Sekunden 50 Meter zurückgelegt. Das ist nicht genau bei der Hälfte der Zeit, da Läufer direkt nach dem Start deutlich langsamer sind als im restlichen Verlauf des Rennens.

e) In einem bestimmten Zeitraum von genau einer Sekunde legt der Läufer 10 Meter zurück. Finde heraus, in welchem Zeitintervall nach dem Start dies der Fall ist.

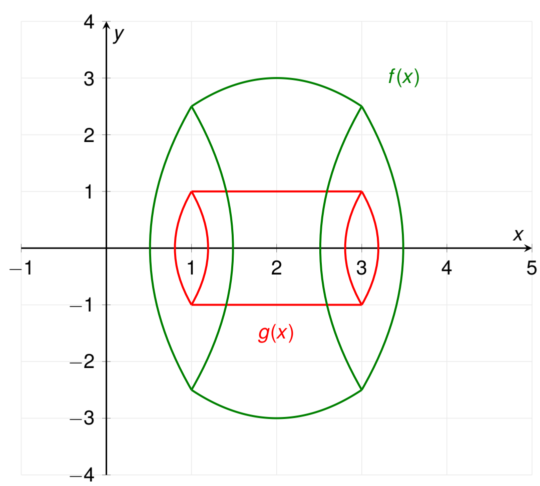
Wir suchen zwei Werte, die den Abstand 1 voneinander haben. Wir nennen diese Werte t und $t + 1$. Im Zeitraum dieser Werte soll der Läufer 10 Meter zurücklegen. Deshalb müssen wir berechnen:

$$\begin{aligned} && \int_t^{t+1} -\tfrac{3}{20}t^2 + \tfrac{12}{5}t + 3 \, dt &= 10 \\ \Leftrightarrow && \left[-\tfrac{1}{20}t^3 + \tfrac{12}{10}t^2 + 3t\right]_t^{t+1} &= 10 \\ \Leftrightarrow && -\tfrac{1}{20}\cdot(t+1)^3 + \tfrac{12}{10}\cdot(t+1)^2 + 3\cdot(t+1) - \left(-\tfrac{1}{20}t^3 + \tfrac{12}{10}t^2 + 3t\right) &= 10 \quad | \text{ nSolve} \\ \Leftrightarrow && t &\approx 3{,}35 \end{aligned}$$

In der Zeit von 3,35 Sekunden bis 4,35 Sekunden nach dem Start legt der Läufer also 10 Meter zurück.

zu Aufgabe 46: Die Graphen von $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = 1$ rotieren um die x-Achse im Intervall $[1, 9]$. Skizziere den Rotationskörper, der sich zwischen den Graphen ergibt und berechne sein Volumen.

Skizze:



Um das Volumen des Rotationskörpers zwischen den Graphen zu berechnen, müssen wir erst das Volumen des äußeren Rotationskörpers berechnen und davon dann das Volumen des inneren abziehen.

$$\begin{aligned}
V = V_f - V_g &= \left(\pi \cdot \int_1^9 f(x)^2 \, \mathrm{d}x\right) - \left(\pi \cdot \int_1^9 g(x)^2 \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \left(\pi \cdot \int_1^9 \left(-\frac{1}{5}x^2 + 2x + 1\right)^2 \mathrm{d}x\right) - \left(\pi \cdot \int_1^9 (1)^2 \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \left(\pi \cdot \int_1^9 \frac{1}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + \frac{18}{5}x^2 + 4x + 1 \, \mathrm{d}x\right) - \left(\pi \cdot \int_1^9 1 \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{125}x^5 - \frac{4}{20}x^4 + \frac{18}{15}x^3 + 2x^2 + x\right]_1^9 - \pi \cdot [x]_1^9 \\
&\approx 634{,}551 - 25{,}133 = 609{,}418 \text{ [VE]}
\end{aligned}$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 609,418 Volumeneinheiten.

A.13 zu Funktions-/Kurvenscharen

zu Aufgabe 47: Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x) = -2x^4 + 2k^2x^2 (k \in \mathbb{R})$.

a) Berechne die Nullstellen und Extrempunkte der Funktionsschar.

1. **Ableitungen:**
   Die ersten drei Ableitungen der Funktion $f_k(x)$ lauten:

$$f_k'(x) = -8x^3 + 4k^2x, \quad f_k''(x) = -24x^2 + 4k^2 \quad \text{und} \quad f_k'''(x) = -48x$$

2. **Nullstellen:**

$$\begin{aligned}
-2x^4 + 2k^2x^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \left(-2x^2 + 2k^2\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad &\vee \quad -2x^2 + 2k^2 = 0 \qquad | -2k^2; \div(-2); \pm\sqrt{} \\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad &\vee \quad x_2 = k \ \vee \ x_3 = -k
\end{aligned}$$

   Fallunterscheidung:
   - Für $k > 0$: Die Funktion hat drei Nullstellen bei $x = 0, x = k$ und $x = -k$.
   - Für $k = 0$: Die Funktion hat nur eine Nullstelle bei $x = 0$.
   - Für $k < 0$: Die Funktion hat drei Nullstellen bei $x = 0, x = k$ und $x = -k$.

3. **Extrempunkte:**
   - Notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
-8x^3 + 4k^2x &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x \cdot \left(-8x^2 + 4k^2\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad &\vee \quad -8x^2 + 4k^2 = 0 \qquad | -4k^2; \div(-8); \pm\sqrt{} \\
\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}k^2} \ &\vee \ x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}k^2}
\end{aligned}$$

- Hinreichende Bedingung: $f_k'(x) = 0 \wedge f_k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_k''(0) &= -24 \cdot (0)^2 + 4k^2 = 4k^2 \\ f_k''\left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right) &= -24 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^2 + 4k^2 = -8k^2 \\ f_k''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right) &= -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^2 + 4k^2 = -8k^2 \end{aligned}$$

  - Fallunterscheidung:

    $k > 0$: Die Funktion besitzt einen Tiefpunkt an der Stelle $x = 0$ und zwei Hochpunkt an den Stellen $x = \sqrt{\frac{1}{2}k^2}$ und $x = -\sqrt{\frac{1}{2}k^2}$.

    $k = 0$: Die Funktion vereinfacht sich zu $f(x) = -2x^4$ und hat nur an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.

    $k < 0$: Die Funktion besitzt einen Tiefpunkt an der Stelle $x = 0$ und zwei Hochpunkte an den Stellen $x = \sqrt{\frac{1}{2}k^2}$ und $x = -\sqrt{\frac{1}{2}k^2}$.

  Jetzt noch die fehlenden y-Werte der Extrempunkte berechnen:

$$f(0) = 0 \rightarrow \text{ Tiefpunkt/Hochpunkt bei } P(0 \mid 0)$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right) = -2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^4 + 2k^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^2 = \frac{1}{2}k^4 \rightarrow \text{HP}_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2} \mid \frac{1}{2}k^4\right).$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right) = -2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^4 + 2k^2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2}\right)^2 = \frac{1}{2}k^4 \rightarrow \text{HP}_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k^2} \mid \frac{1}{2}k^4\right)$$

b) Berechne die Ortskurve aller Hochpunkte.

1. Koordinaten eines Extrempunktes auslesen:

   Der Hochpunkt hat die Koordinaten $\text{HP}_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}k^2} \mid \frac{1}{2}k^4\right)$.

   Also: $x = \sqrt{\frac{1}{2}k^2}$ und $y = \frac{1}{2}k^4$

2. x-Koordinate nach Parameter umformen:

$$\begin{aligned} & x &=& \sqrt{\tfrac{1}{2}k^2} && \mid \text{quadrieren} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 &=& \tfrac{1}{2}k^2 && \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 &=& k^2 && \mid \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow\ & k_1 = \sqrt{2x^2} &\vee& k_2 = -\sqrt{2x^2} && \end{aligned}$$

   Hinweis: $k_2 = -\sqrt{2x^2}$ führt zum gleichen Ergebnis und kann deshalb vernachlässigt werden.

3. Ergebnis in die y-Koordinate einsetzen:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2x^2})^4 = \frac{1}{2} \cdot (2x^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^4 = 2x^4$$

   Antwort: Alle Hochpunkte liegen also auf dem Graphen der Funktion $g(x) = 2x^4$.
   Da die Funktion achsensymmetrisch ist (und durch den Ursprung geht), liegen auch die anderen Hochpunkte auf diesem Graphen.

zu Aufgabe 48: Untersuche die Funktionsschar $f_k(x) = \frac{2}{k}x^3 - 8x$ mit $k > 0$ auf ihre Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

1. **Ableitungen:**
   Die ersten drei Ableitungen der Funktion $f_k(x)$ lauten:

$$f_k'(x) = \frac{6}{k}x^2 - 8 \quad \text{und} \quad f_k''(x) = \frac{12}{k}x \quad \text{sowie} \quad f_k'''(x) = \frac{12}{k}$$

2. **Nullstellen:**

$$\begin{aligned} \frac{2}{k}x^3 - 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(\frac{2}{k}x^2 - 8\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ \frac{2}{k}x^2 - 8 = 0 & \qquad \mid +8; \div \left(\frac{2}{k}\right); \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{4k} \ \vee \ x = -\sqrt{4k} & \end{aligned}$$

   Fallunterscheidung nicht notwendig, da $k > 0$ laut Aufgabenstellung.

3. **Extrempunkte:**

   - Notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{6}{k}x^2 - 8 &= 0 \quad \mid +8; \div \left(\frac{6}{k}\right); \pm\sqrt{} \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}k} \quad &\vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}k} \end{aligned}$$

   - Hinreichende Bedingung: $f_k'(x) = 0$ und $f_k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_k''\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right) &= \frac{12 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}k}}{k} & > 0 \text{ für } k > 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f_k''\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right) &= -\frac{12 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}k}}{k} & < 0 \text{ für } k > 0 \rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

   - y-Wert berechnen:

$$f_k\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right) = \tfrac{2}{k} \cdot \left(\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right)^3 - 8 \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}k} = \sqrt{\tfrac{4}{3}k} \cdot \left(\tfrac{2}{k} \cdot \tfrac{4}{3}k - 8\right) = -\tfrac{16}{3} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}k}$$

$$\rightarrow \text{TP}\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}k} \mid -\tfrac{16}{3} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right)$$

$$f_k\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right) = \tfrac{2}{k} \cdot \left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right)^3 - 8 \cdot \left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right) = -\sqrt{\tfrac{4}{3}k} \cdot \left(\tfrac{2}{k} \cdot \tfrac{4}{3}k - 8\right) = \tfrac{16}{3} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}k}$$

$$\rightarrow \text{HP}\left(-\sqrt{\tfrac{4}{3}k} \mid \tfrac{16}{3} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}k}\right)$$

4. **Wendepunkte:**

   - Notwendige Bedingung: $f_k''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{12}{k}x &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0 \end{aligned}$$

- Hinreichende Bedingung: $f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$

  $f_k'''(0) = \dfrac{12}{k} > 0 \quad$ für $k > 0 \rightarrow$ Rechts-Links-Wendepunkt bei WP$(0 \mid 0)$

zu Aufgabe 49: Forscher wissen, dass es in den nächsten Tagen zu einem Erdbeben kommen wird, das einen Tsunami auslöst. Sie wissen aber noch nicht genau, welche Stärke es haben wird. Die Funktion

$$f_k(x) = e^{-0{,}8x} \cdot (5kx^2 + 1)$$

modelliert den beim Erdbeben entstehenden Tsunami. x gibt die Breite der Welle in 100-Meter-Schritten an, y die Höhe der Welle in 1-Meter-Schritten. Die Modellierung geht davon aus, dass sich die Welle von rechts nach links aufs Ufer zubewegt und die y-Achse auf der Höhe liegt, bei der das Festland beginnt. k steht dabei für die Stärke des Erdbebens auf der Richterskala. k kann im Modell Werte zwischen 0 und 10 annehmen.

Die Bewohner der ans Meer grenzenden Stadt werden ab einer Wellenhöhe von 20 Metern aufgefordert, ihr Haus zu verlassen und sich in Sicherheit zu begeben.

a) Bestimme, ab welcher Erdbebenstärke auf der Richterskala die Bewohner ihr Haus verlassen sollten.

   Hinweis: Nutze den Taschenrechner, um die Aufgabe zu lösen und gib die Lösung auf eine Nachkommastelle gerundet an.

   Wir berechnen hier zuerst den Hochpunkt der Funktion und schauen dann, ab welchen Werten von k die Höhe der Welle 20 Meter übersteigt.

   1. Die erste und zweite Ableitung von $f(x)$ berechnen:

      $f_k'(x) = e^{-0{,}8x} \cdot \left(-4kx^2 + 10kx - 0{,}8\right)$ und $f_k''(x) = e^{-0{,}8x} \cdot \left(3{,}2kx^2 - 16kx + 10k + 0{,}64\right)$

   2. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{lrcll}
 & e^{-0{,}8x} \cdot \left(-4kx^2 + 10kx - 0{,}8\right) & = & 0 & \mid e^{-0{,}8x} \neq 0 \text{ für alle } x \\
\rightarrow & -4kx^2 + 10kx - 0{,}8 & = & 0 & \mid \div(-4k) \\
\Leftrightarrow & x^2 - 2{,}5x + \frac{1}{5k} & = & 0 & \mid pq\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} & = & -\dfrac{(-2{,}5)}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{(-2{,}5)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{5k}\right)} & \\
\Leftrightarrow & x_1 & = & 1{,}25 + \sqrt{1{,}5625 - \dfrac{1}{5k}} & \\
\vee & x_2 & = & 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \dfrac{1}{5k}} &
\end{array}$$

      Anmerkung: Da die hinreichende Bedingung hier sehr aufwendig zu berechnen wäre, argumentieren wir lieber mit dem Funktionsgraphen. Dort sieht man, dass die hinreichende Bedingung nicht verletzt wird, also $f_k''(x) \neq 0$ für $0 < k < 10$ gilt. Zudem sehen wir, dass x_1 unser gesuchter Hochpunkt ist und wir keine Randextrema überprüfen müssen, da die Funktion nach rechts hin nicht größer als der Hochpunkt wird und nach links hin im Sachkontext auf den Wert $x = 0$ begrenzt ist.

3. y-Wert berechnen:

$$f_k\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5k}}\right)=e^{-0{,}8\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5k}}\right)}\cdot\left(5k\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5k}}\right)^2+1\right)$$

Dies setzen wir jetzt gleich 20, um herauszufinden, bei welchem k-Wert die Welle eine Höhe von 20 Metern annimmt. Eine Lösungsmöglichkeit:
Man ersetzt das k durch ein x und lässt sich

$$h(x)=e^{-0{,}8\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5x}}\right)}\cdot\left(5x\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5x}}\right)^2+1\right)\quad\text{und } i(x)=20$$

zeichnen und lässt sich dann die Koordinaten des Schnittpunktes anzeigen. Dieser liegt bei ca. $(4{,}7 \mid 20)$. Die Bewohner sollten ihr Haus also ab einer Erdbebenstärke von 4,7 auf der Richterskala verlassen.

b) Ab einer Erdbebenstärke von 7 auf der Richterskala wird die gesamte Küstenregion evakuiert. Wie hoch sind die Wellen dann laut der Modellierung mindestens?

Hier müssen wir einfach nur in die y-Koordinate des Hochpunktes für das k eine 7 einsetzen und schon wissen wir, wie hoch die Welle dann ist. Also:

$$e^{-0{,}8\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5\cdot(7)}}\right)}\cdot\left(5\cdot(7)\cdot\left(1{,}25+\sqrt{1{,}5625-\frac{1}{5\cdot(7)}}\right)^2+1\right)\approx 29{,}74$$

Die Welle hat also mindestens eine Größe von ca. 29,74 Metern, wenn die gesamte Küstenregion evakuiert wird.

B Lineare Algebra

B.1 zu Geraden im Raum

zu Aufgabe 50: Stelle eine Gerade auf, die die Punkte A und B enthält.

a) $A(2 \mid 0 \mid 2)$, $B(6 \mid 8 \mid 2)$
Es kann theoretisch unendlich viele Lösungen für die Geradengleichung geben, wir geben eine Beispiellösung an.

Die Grundstruktur unserer Geradengleichung sieht so aus: $g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Wählen wir A als Stützvektor, erhalten wir die Geradengleichung

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Der Richtungsvektor (Vektor am Parameter t) ergibt sich dadurch, dass man B zeilenweise von A abzieht:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $A(5 \mid 5 \mid 5)$, $B(-7 \mid 2 \mid 4)$
Es kann theoretisch unendlich viele Lösungen für die Geradengleichung geben, wir geben eine Beispiellösung an.

Die Grundstruktur unserer Geradengleichung sieht so aus: $g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Wählen wir A als Stützvektor, erhalten wir die Geradengleichung

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Der Richtungsvektor (Vektor am Parameter t) ergibt sich dadurch, dass man B zeilenweise von A abzieht:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $A(-0{,}5 \mid 1 \mid 1{,}5)$, $B(1 \mid -1 \mid 2)$
Es kann theoretisch unendlich viele Lösungen für die Geradengleichung geben, wir geben eine Beispiellösung an.
Die Grundstruktur unserer Geradengleichung sieht so aus: $g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$.
Wählen wir A als Stützvektor, erhalten wir die Geradengleichung

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Der Richtungsvektor (Vektor am Parameter t) ergibt sich dadurch, dass man B zeilenweise von A abzieht:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

zu Aufgabe 51: Gegeben sei die Gerade

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \text{ sowie die Punkte } P(13 \mid 8 \mid -20) \text{ und } Q(11 \mid 3 \mid 12)$$

Überprüfe, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g liegen.

- Überprüfung, ob P auf der Geraden liegt.
  Wir setzen den Punkt P gleich der Geraden g und lösen zeilenweise auf:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 13 & = & 3 + 4 \cdot t \\ 8 & = & -1 + 2 \cdot t \\ -20 & = & 2 + 5 \cdot t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} t & = & \frac{10}{4} \\ t & = & \frac{9}{2} \end{array} \right|$$

  Schon in der zweiten Zeile ergibt sich ein anderes t als in der ersten Zeile. Der Punkt P kann nicht auf der Geraden g liegen.

- Überprüfung, ob Q auf der Geraden liegt.
  Wir setzen den Punkt Q gleich der Geraden g und lösen zeilenweise auf:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 11 & = & 3 + 4 \cdot t \\ 3 & = & -1 + 2 \cdot t \\ 12 & = & 2 + 5 \cdot t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} t & = & 2 \\ t & = & 2 \\ t & = & 2 \end{array} \right|$$

  Damit ergibt sich für alle drei Zeilen derselbe Wert für t. Der Punkt Q liegt somit auf der Geraden g.

zu Aufgabe 52: Gegeben sind die Punkte $A(-9 \mid -6 \mid 27)$ und $B(0 \mid 0 \mid 9)$.

a) Zeige, dass der Punkt $P(2{,}25 \mid 1{,}5 \mid 4{,}5)$ auf der Geraden durch A und B liegt.
Als Erstes stellen wir die Geradengleichung auf. Hier verwenden wir den Vektor zu A als Stützvektor und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor. Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ errechnet sich, indem man zeilenweise A von B abzieht. Als Geradengleichung erhalten wir:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Für die Punktprobe den Punkt P mit der Geraden gleichsetzen und zeilenweise lösen:

$$\begin{pmatrix} 2{,}25 \\ 1{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 27 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 2{,}25 & = & -9 + 9 \cdot t \\ 1{,}5 & = & -6 + 6 \cdot t \\ 4{,}5 & = & 27 - 18 \cdot t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} t & = & 1{,}25 \\ t & = & 1{,}25 \\ t & = & 1{,}25 \end{array} \right|$$

Der Punkt P liegt also auf der Geraden durch A und B.

b) Liegt der Punkt P zwischen A und B?

Der Punkt würde zwischen A und B liegen, wenn der Parameter t zwischen 0 und 1 liegen würde. Da der Parameter t aber bei 1,25 liegt, liegt auch der Punkt P nicht zwischen A und B, sondern hinter B, aus der Sicht von A.

zu Aufgabe 53: Untersuche die Lagebeziehung der gegebenen Geraden g und h. Haben die Geraden einen Schnittpunkt, so bestimme diesen.

a) $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Diese Geraden **haben keine kollinearen Richtungsvektoren**. Das bedeutet, dass die Vektoren weder gleich noch Vielfache voneinander sind. Sie können daher nur windschief sein oder einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wir überprüfen, ob die Geraden einen Schnittpunkt haben. Dazu setzen wir die Geraden gleich und schauen, ob es eindeutige Lösungen für r und s gibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des LGS ergibt die Werte $r = 2$ und $s = -3$. Damit haben g und h einen gemeinsamen Schnittpunkt:

$$r = 2 \text{ in } g \text{ einsetzen } \rightarrow \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der **Schnittpunkt** liegt bei $S(-1|7|5)$.

b) $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Diese Geraden **haben keine kollinearen Richtungsvektoren**. Das bedeutet, dass die Vektoren weder gleich noch Vielfache voneinander sind. Sie können daher nur windschief sein oder einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wir überprüfen, ob die Geraden einen Schnittpunkt haben. Dazu setzen wir die Geraden gleich und schauen, ob es eindeutige Lösungen für r und s gibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Das entstehende LGS hat keine Lösung. Damit haben g und h keinen gemeinsamen Schnittpunkt und sind **windschief**.

c) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Diese Geraden **haben kollinearen Richtungsvektoren**. Das bedeutet, dass die Vektoren gleich oder Vielfache voneinander sind. Sie können daher parallel oder identisch sein.

Wir überprüfen, ob die Geraden einen Schnittpunkt haben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das entstehende LGS hat unendlich viele Lösungen. Damit sind g und h **identisch**.

zu Aufgabe 54: Eine Kameradrohne fliegt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit vom Punkt $A(2 \mid 4 \mid 1)$ zum Punkt $B(8 \mid 0 \mid 3)$ und benötigt dafür eine Minute. Die Drohne nutzt dafür den direkten Weg. Die Längeneinheiten gelten in Metern.

Nach welcher Zeit vom Punkt A aus hat die Kameradrohne eine Höhe von sechs Metern?

Als Erstes machen wir uns klar, dass die z-Koordinate die Höhe der Drohne angibt.

Um die Aufgabe nun zu lösen, stellen wir mit den beiden Punkten aus der Aufgabe die Geradengleichung auf und setzen anschließend die z-Koordinate gleich sechs. Dann wissen wir nämlich für welches t die Drohne eine Höhe von sechs Metern erreicht hat.

Wählt man nun den Vektor zum Punkt A als Stützvektor sowie den Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als Richtungsvektor, so erhalten wir als fertige Geradengleichung:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Jetzt gleichsetzen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nun betrachten wir nur die dritte Koordinate und erhalten: $6 = 1 + 2t \Leftrightarrow t = 2{,}5$.

Da ein t genau einer Minute entspricht, entsprechen $2{,}5t$ genau 2,5 Minuten. Deshalb hat die Drohne nach 2,5 Minuten eine Höhe von sechs Metern erreicht.

B.2 zu Orthogonalität & Skalarprodukt

zu Aufgabe 55: Untersuche, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander orthogonal sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -0{,}6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -0{,}6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot (-0{,}6) + (-0{,}5) \cdot 2{,}5 = 0{,}15$$

Damit sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht zueinander orthogonal.

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}16 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}16 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot (-0{,}16) + (-3) \cdot 0{,}3 = 0{,}16$$

Damit sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht zueinander orthogonal.

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-8) + 0 \cdot 12 = 0$$

Damit sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander orthogonal.

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt ergibt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} = 7 \cdot 10 + (-1) \cdot 20 + 2{,}5 \cdot (-20) = 0$$

Damit sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander orthogonal.

zu Aufgabe 56: Berechne die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \cdot 4 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 32.$

b) $\begin{pmatrix} 3a \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = 3a^2 - a^2 + 4a = 2a^2 + 4a.$

c) $\begin{pmatrix} a \\ -b \\ a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot 0 - ab + ab = 0.$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 3a \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 3a + 1 \cdot 3 + 12 \cdot (-3) + (-a) \cdot 2 + 2a \cdot (-2)$

$= 32 + 6a + 3 - 36 - 2a - 4a = 6a - 2a - 4a + 32 + 3 - 36 = 35 - 36 = -1$

zu Aufgabe 57: Ergänze die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ so, dass sie zum Vektor $\vec{d}$ orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ ? \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ ? \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ ? \\ -16 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Warum gibt es zu einem vorgegebenen Vektor beliebig viele Vektoren, die zu diesem orthogonal sind?

Wir berechnen das Skalarprodukt der gefragten Vektoren und setzen es gleich Null. Anschließend stellen wir nach x um und interpretieren das Ergebnis.

- Untersuchung von $\vec{a}$ und $\vec{d}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ x \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow & 2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 2 + x \cdot (-1) &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & 6 + 1 - x &= 0 & \mid +x \\ &\Leftrightarrow & x &= 7 & \end{aligned}$$

  Für $x = 7$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}$ orthogonal zueinander.

- Untersuchung von $\vec{b}$ und $\vec{d}$:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow & 10 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + y \cdot (-1) &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & 30 + 8 - y &= 0 & \mid +y \\ &\Leftrightarrow & y &= 38 & \end{aligned}$$

  Für $y = 38$ sind die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ orthogonal zueinander.

- Untersuchung von $\vec{c}$ und $\vec{d}$:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ z \\ -16 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow & 12 \cdot 3 + z \cdot 2 + (-16) \cdot (-1) &= 0 & \\ &\Leftrightarrow & 36 + 2z + 16 &= 0 & \mid -2z; \div(-2) \\ &\Leftrightarrow & z &= -26 & \end{aligned}$$

  Für $z = -26$ sind die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ orthogonal zueinander.

Die gegebenen Vektoren sind alle orthogonal zum Vektor $\vec{d}$. Das ist möglich und auch sinnvoll, denn im Dreidimensionalen hat ein Vektor unendlich viele Vektoren, die im rechten Winkel zu ihm stehen.

zu Aufgabe 58: Überprüfe, ob das Viereck *ABCD* ein Rechteck ist. Es genügt in diesem Fall, die Skalarprodukte von zwei gegenüberliegenden Ecken zu prüfen. Handelt es sich bei beiden Winkeln um rechte Winkel, so können die Seiten insgesamt nur noch ein Rechteck bilden. Wenn es keine rechten Winkel sind, dann kann die Konstruktion kein Rechteck sein.

a) $A(8 \mid -2 \mid 1), B(3 \mid 0 \mid 1), C(3 \mid 0 \mid 10), D(8 \mid -2 \mid 10)$

Wir berechnen die Verbindungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$ und $\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$, handelt es sich tatsächlich um ein Rechteck. Wichtig ist, dass wir das Skalarprodukt von zwei Vektoren berechnen, die denselben Eckpunkt haben.

b) $A(2 \mid -6 \mid 8), B(1{,}5 \mid -2 \mid 5), C(-6 \mid -4 \mid 22), D(-2{,}5 \mid -0{,}5 \mid 2{,}5)$

Wir berechnen die Verbindungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -5{,}5 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3{,}5 \\ -19{,}5 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -3{,}25$ ist und damit nicht orthogonal ist, kann schon kein Viereck vorliegen.

zu Aufgabe 59: Ermittle einen Vektor, der sowohl zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ als auch zu $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Dafür muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Wir schreiben die gegebenen Informationen in ein LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2a + 2b - 2c & = & 0 \\ 1{,}5a + 1{,}5b + c & = & 0 \\ 2a + 2b - 2c & = & 1{,}5a + 1{,}5b + c \end{array} \right|$$

Als mögliche Lösungen ergeben sich $a = -b, b = b$ und $c = 0$.

Wählt man also $a = -1, b = 1$ und $c = 0$, so erhält man einen Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ der zu } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist.

B.3 zu Winkel

zu Aufgabe 60: Josef steht auf einem Fußballfeld im Punkt $S(0 \mid 0 \mid 0)$ und möchte auf das Tor schießen. Der Punkt S gibt den Elfmeterpunkt an. Berechne wie groß der Winkel zwischen den Torpfosten A und B ist.

Als Erstes müssen wir mit den gegebenen Angaben die Koordinaten der Torpfosten bestimmen. Die x-Koordinate ist 11, da Josef 11 Meter vom Tor entfernt steht. Die y-Koordinate ist $\frac{7{,}32}{2}$ für den einen Pfosten und $-\frac{7{,}32}{2}$ für den anderen Torpfosten. Die z-Koordinate ist 2,44, da das Tor 2,44 Meter hoch ist. Theoretisch könnte man jedoch jeden beliebigen Wert für z verwenden, da die Größe des Winkels von der Koordinate nicht verändert wird. Als Punkte ergeben sich somit: $A(11 \mid -3{,}66 \mid 2{,}44)$ und $B(11 \mid 3{,}66 \mid 2{,}44)$.

Wir berechnen also den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{0A}$ und $\overrightarrow{0B}$ berechnen. Dazu verwenden wir die bekannte Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 11 \\ -3{,}66 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 11 \\ 3{,}66 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 11 \\ -3{,}66 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 3{,}66 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} \right|} \approx \frac{113{,}59}{\sqrt{11^2 + (-3{,}66)^2 + 2{,}44^2} \cdot \sqrt{11^2 + 3{,}66^2 + 2{,}44^2}} \approx 0{,}81$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}81) \approx 35{,}9^\circ$$

Der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{0A}$ und $\overrightarrow{0B}$ ist also ungefähr $35{,}9^\circ$ groß.

zu Aufgabe 61: Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel α.

Da die beiden Richtungsvektoren der Geraden nicht kollinear sind, müssen sie sich schneiden oder windschief sein. Wir setzen die Geradengleichungen miteinander gleich und schreiben sie in ein LGS:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} -2 + 8r & = & 2 + 12s \\ -2 + 4r & = & 3 + 5s \\ 1 & = & 4 - s \end{array} \right|$$

Dann erhalten wir die Lösungen $r = 5$ und $s = 3$. Damit haben die beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt. Durch Einsetzen von r in die Gerade g erhalten wir den Schnittpunkt $S(38 \mid 18 \mid 1)$.

Den Schnittwinkel α berechnen wir, indem wir die Richtungsvektoren der Geraden in dazugehörige Formel einsetzen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \approx \frac{116}{\sqrt{8^2+4^2+0^2} \cdot \sqrt{12^2+5^2+(-1)^2}} \approx 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}99) \approx 8{,}11°$$

zu Aufgabe 62: Berechne den Winkel der Geraden g, welche durch die Punkte $P(-1 \mid 2 \mid 3)$ und $Q(1 \mid 2 \mid 3)$ geht, mit der Ebene

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}.$$

Um den Schnittwinkel zwischen g und E berechnen zu können, müssen wir zunächst zeigen, dass g und E sich tatsächlich schneiden. Dazu bilden wir die Geradengleichung von g mit $\overrightarrow{0Q}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{QP}$ als Richtungsvektor:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

Da wir zur Berechnung des Winkels später sowieso den Normalenvektor von E benötigen, können wir auch jetzt schon die Ebenengleichung von E in Koordinatenform umwandeln. Deshalb berechnen wir zunächst den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen des Stützvektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } -38x_1 + 6x_2 + 10x_3$$

erhalten wir: $-38 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = -16$, also: $E : -38x_1 + 6x_2 + 10x_3 = -16$.

Nun lesen wir die Geradengleichung von g zeilenweise aus und setzen die Zeilen in die Ebenengleichung ein. Wir erhalten:

$$\begin{array}{lrcll}
 & -38 \cdot (1-2t) + 6 \cdot (2) + 10 \cdot (3) & = & -16 & \\
\Leftrightarrow & -38 - 76t + 12 + 30 & = & -16 \mid +76t & \\
\Leftrightarrow & 4 & = & 76t - 16 & \mid +16 \\
\Leftrightarrow & 20 & = & 76t & \mid : 76 \\
\Leftrightarrow & \frac{5}{19} & = & t &
\end{array}$$

Damit durchstößt g die Ebene E eindeutig. Wir können also den Schnittwinkel berechnen. Wir verwenden dazu den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und den Richtungsvektor der Geraden und setzen diese in die passende Formel ein:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -38 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -38 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{76}{\sqrt{(-38)^2 + 6^2 + 10^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2}} \approx 0{,}96$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}96) \approx 73{,}74^\circ$$

Der gesuchte Winkel hat damit eine Größe von ungefähr 73,74°.

zu Aufgabe 63: Berechne den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.

a) $E_1 : 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 65$ und $E_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Wieder müssen wir zunächst prüfen, ob E_1 und E_2 sich tatsächlich schneiden. Dazu berechnen wir erst einmal den Normalenvektor von E_2 mit dem Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Normalenvektoren auf jeden Fall nicht kollinear und die Ebenen schneiden sich. Für den Winkel zwischen den beiden Ebenen gilt dann:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{67}{\sqrt{5^2 + (-6)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{18^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} \approx 0{,}34$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}34) \approx 70{,}12^\circ$$

Der gesuchte Winkel hat demnach eine Größe von ungefähr 70,12°.

b) $E_1 : 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 65$ und $E_2 : 14x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -8$

Wir sehen sofort, dass die Normalenvektoren nicht kollinear sind. Damit müssen E_1 und E_2 sich schneiden. Da beide Ebenengleichungen bereits in Koordinatenform gegeben sind, können wir die geforderten Werte sofort in die Formel für den Winkel einsetzen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} = \frac{88}{\sqrt{5^2 + (-6)^2 + 7^2 \cdot \sqrt{14^2 + 4^2 + 6^2}}} \approx 0{,}53$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}53) \approx 57{,}99^\circ$$

Der gesuchte Winkel hat damit eine Größe von ungefähr 57,99°.

B.4 zu Ebenen im Raum

zu Aufgabe 64: Bestimme eine Parametergleichung, die die Punkte A, B und C enthält.

In den folgenden Beispiellösungen verwenden wir stets den Vektor $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren. Theoretisch könnten wir auch andere Punkte als Stützvektor verwenden und andere Richtungsvektoren.

a) $A(4 \mid 2{,}5 \mid 1), B(-2 \mid 10 \mid 14), C(4 \mid 0 \mid 0)$

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7{,}5 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

b) $A(-2 \mid 0 \mid 7), B(-1 \mid 0{,}5 \mid 3), C(10 \mid 0 \mid 6)$

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

c) $A(14 \mid 18 \mid 4), B(0 \mid 0 \mid 0), C(4 \mid 0 \mid 0{,}5)$

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -18 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

zu Aufgabe 65: Berechne eine Parametergleichung für die $x-y$-Ebene, für die $x-z$-Ebene und die $y-z$-Ebene.

- Die $x-y$-Ebene wird von der x- und der y-Achse aufgespannt. Somit können wir die Achsen als Richtungsvektoren verwenden. Als Stützvektor verwenden wir den Ursprung $(0 \mid 0 \mid 0)$. Wir lassen diesen Punkt in der Schreibweise der Ebene meistens weg.

  Es gilt damit also: $E_{xy} : \overrightarrow{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}.$

- Die $x-z$-Ebene wird von der x- und der z-Achse aufgespannt. Somit können wir die Achsen als Richtungsvektoren verwenden. Als Stützvektor verwenden wir den Ursprung $(0 \mid 0 \mid 0)$. Wir lassen diesen Punkt in der Schreibweise der Ebene meistens weg.

  Es gilt damit also: $E : \overrightarrow{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}.$

- Die $y-z$-Ebene wird von der y- und der z-Achse aufgespannt. Somit können wir die Achsen als Richtungsvektoren verwenden. Als Stützvektor verwenden wir den Ursprung $(0 \mid 0 \mid 0)$. Wir lassen diesen Punkt in der Schreibweise der Ebene meistens weg.

  Es gilt damit also: $E : \overrightarrow{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}.$

zu Aufgabe 66: Berechne aus dem Normalenvektor $\vec{n}$ und dem Punkt P eine Koordinatengleichung der Ebene.

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P(-3 \mid 1 \mid 3)$

$$\begin{aligned} && \vec{n} \bullet \vec{X} &= \vec{n} \bullet \vec{P} \\ \Leftrightarrow && 0 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow && -7x_2 + x_3 &= 0 \cdot (-3) - 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow && -7x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

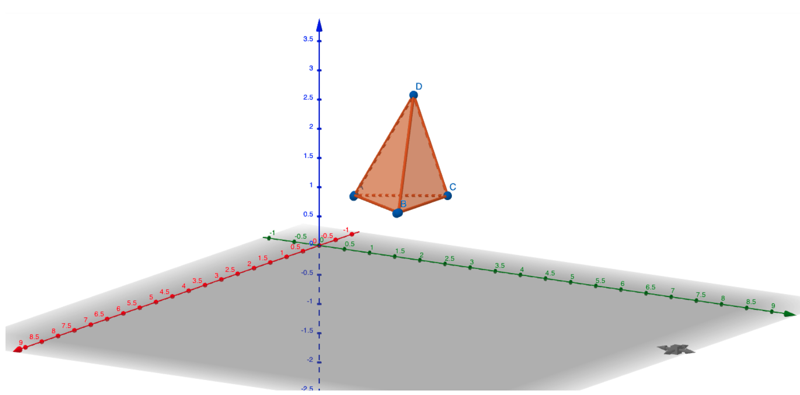
b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $P(8 \mid 1 \mid 1)$

$$\begin{aligned} && \vec{n} \bullet \vec{X} &= \vec{n} \bullet \vec{P} \\ \Leftrightarrow && 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow && 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow && 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 28 \end{aligned}$$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $P(-3 \mid 7 \mid 0)$

$$\begin{aligned} && \vec{n} \bullet \vec{X} &= \vec{n} \bullet \vec{P} \\ \Leftrightarrow && 1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow && x_1 + 6x_2 - 10x_3 &= 1 \cdot (-3) + 6 \cdot 7 + (-10) \cdot 0 \\ \Leftrightarrow && x_1 + 6x_2 - 10x_3 &= 39 \end{aligned}$$

zu Aufgabe 67: Wir haben eine Pyramide $ABCD$ gegeben, wobei $A(2 \mid 2 \mid 1{,}5)$, $B(4{,}5 \mid 4{,}5 \mid 2)$ und $C(3 \mid 4{,}5 \mid 2)$ jeweils die Eckpunkte und $D(2{,}5 \mid 3{,}5 \mid 3{,}5)$ die Spitze der Pyramide sind. Skizziere die Pyramide im Koordinatensystem und ermittle eine Ebenengleichungen für die vier Seitenflächen der Pyramide.[1]



[1] Das Bild wurde mit Geogebra erstellt.

Mit den gegebenen Informationen ist es am einfachsten die Ebene in Parameterform darzustellen. Auch hier gilt wieder: Es handelt sich um Beispiellösungen, die je nach Stützvektor und Richtungsvektor variieren können.

- Ebene $E_{ABC} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$
- Ebene $E_{ABD} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$
- Ebene $E_{ACD} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$
- Ebene $E_{BCD} = \overrightarrow{0B} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

zu Aufgabe 68: Prüfe, ob der Punkt $P(2 \mid 0 \mid 2)$ in eine der folgenden Ebenen liegt.

a) $E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Als Erstes lesen wir die Ebene zeilenweise aus, schrieben sie in ein LGS und setzen sie mit dem Punkt gleich:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} -3r & = & 2 \\ 1 + 6s & = & 0 \\ 7 + 2r + 2s & = & 2 \end{array} \right|$$

Nun müssen wir das LGS lösen und überprüfen, ob der Punkt in der Ebene liegt. Die erste Zeile, liefert die Lösungen $r = -2/3$ und die zweite Zeile die Lösung $s = -\frac{1}{6}$. Setzt man diese Werte in die dritte Zeile ein, so ergibt sich eine unwahre Aussage. Damit kann P kein Bestandteil von E sein.

b) $E : 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 = -4$

Wenn man den Punkt einsetzt, dann kommt eine wahre Aussage heraus.

$$E : 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 - 7 \cdot 2 = -4 \checkmark$$

Deshalb liegt der Punkt P in der Ebene.

B.5 zu Ebenen – Spurpunkte und Formumwandlung

zu Aufgabe 69: Berechne die Spurpunkte der Ebenen.

a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$

Hinweis: Wir könnten die Parameterform natürlich auch in die Koordinatenform umrechnen und dann die Spurpunkte bestimmen.

Um bei dieser Ebene in Parameterform die Spurpunkte zu bestimmen, setzen wir sie mit den allgemeingültigen Spurpunkten gleich und lösen die entstehenden LGS.

- Spurpunkt x-Achse

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} x & = & 5 - r + 10s \\ 0 & = & 6 + 0{,}5r + 6s \\ 0 & = & 10 + 2r + 2s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in den unteren beiden Zeilen ergibt: $r = -4{,}36364$ und $s = -0{,}636364$. Einsetzen dieser Werte in die erste Zeile ergibt: $x = 3$.

- Spurpunkt y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} 0 & = & 5 - r + 10s \\ y & = & 6 + 0{,}5r + 6s \\ 0 & = & 10 + 2r + 2s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in der ersten und der dritten Zeile ergibt: $r = -\frac{45}{11}$ und $s = -\frac{10}{11}$. Einsetzen dieser Werte in die zweite Zeile ergibt: $y = -\frac{3}{2}$.

- Spurpunkt z-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} 0 & = & 5 - r + 10s \\ 0 & = & 6 + 0{,}5r + 6s \\ z & = & 10 + 2r + 2s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in den oberen beiden Zeilen ergibt: $r = -2{,}72727$ und $s = -0{,}772727$. Einsetzen dieser Werte in die dritte Zeile ergibt: $z = 3$.

Die Spurpunkte lauten: $A(15{,}7273 \mid 0 \mid 0), B(0 \mid -\frac{3}{2} \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 3)$.

b) Ebene E durch die Punkte $A(4|4|0), B(1|1|2), C(6|0|4)$

Als Erstes müssen wir die Ebene in Parameterform aufstellen. Wir verwenden dazu $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor sowie $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren. Es ergibt sich

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

als Parametergleichung der Ebene.

Wir berechnen nun wie gewohnt die Spurpunkte:

- Spurpunkt x-Achse

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} x & = & 4 - 3r + 2s \\ 0 & = & 4 - 3r - 4s \\ 0 & = & 2r + 4s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in den unteren beiden Zeilen ergibt: $r = 4$ und $s = -2$. Einsetzen dieser Werte in die erste Zeile ergibt: $x = -12$.

- Spurpunkt y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} 0 & = & 4 - 3r + 2s \\ y & = & 4 - 3r - 4s \\ 0 & = & 2r + 4s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in der ersten und der dritten Zeile ergibt: $r = 1$ und $s = -\frac{1}{2}$. Einsetzen dieser Werte in die zweite Zeile ergibt: $y = 3$.

- Spurpunkt z-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} 0 & = & 4 - 3r + 2s \\ 0 & = & 4 - 3r - 4s \\ z & = & 2r + 4s \end{array} \right|$$

Lösung des LGS in den oberen beiden Zeilen ergibt: $r = \frac{4}{3}$ und $s = 0$. Einsetzen dieser Werte in die zweite Zeile ergibt: $z = \frac{8}{3}$.

Die Spurpunkte lauten: $A(-12|0|0), B(0|3|0)$ und $C\left(0|0|\frac{8}{3}\right)$.

c) $E: 5x - 7y + 9z = 2$

Bei der Koordinatenform ist das Berechnen der Spurpunkte sehr einfach. Einfach einsetzen:

- Spurpunkt auf der x-Achse:

$$y = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 5x - 7 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 2 \Rightarrow x = \tfrac{2}{5} \Rightarrow A\left(\tfrac{2}{5} \mid 0 \mid 0\right)$$

- Spurpunkt auf der y-Achse:

$$x = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 7y + 9 \cdot 0 = 2 \Rightarrow y = -\tfrac{2}{7} \Rightarrow B\left(0 \mid -\tfrac{2}{7} \mid 0\right)$$

- Spurpunkt auf der z-Achse:

$$x = 0 \text{ und } y = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 9z = 2 \Rightarrow z = \tfrac{2}{9} \Rightarrow C\left(0 \mid 0 \mid \tfrac{2}{9}\right)$$

zu Aufgabe 70: Stelle mit den Punkten eine Ebene in Koordinatenform und in Parameterform auf.

a) $A(-2 \mid 3 \mid 5), B(5 \mid 1 \mid 3), C(2 \mid -3 \mid 4)$

(i) Als Erstes stellen wir die Ebene in Parameterform auf mit dem Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ sowie den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

(ii) Als Zweites stellen wir nun die Koordinatenform mithilfe der Richtungsvektoren auf. Dazu berechnen wir den Normalenvektor mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$\text{Normalenvektor: } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatengleichung hat also die (vorläufige) Form $-10x - 1y - 34z = \ldots$
Darin setzen wir nun die Koordinaten des Stützvektors $A(-2|3|5)$ ein: $-10 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 - 34 \cdot 5 = -153$. Eine Koordinatengleichung lautet:

$$-10x - y - 34z = -153$$

b) $A(4 \mid 0 \mid 0), B(5 \mid 0 \mid 0), C(1 \mid 2 \mid 3)$

(i) Als Erstes stellen wir die Ebene in Parameterform auf mit dem Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ sowie den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

(ii) Als Zweites stellen wir nun die Koordinatenform mithilfe der Richtungsvektoren auf. Dazu berechnen wir den Normalenvektor mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$\text{Normalenvektor: } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatengleichung hat also die (vorläufige) Form $-3y + 2z = \ldots$
Darin setzen wir nun die Koordinaten des Stützvektors $A(4|0|0)$ ein: $-3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Eine Koordinatengleichung lautet:

$$-3y + 2z = 0$$

c) $A(6 \mid 1 \mid 3), B(6 \mid 0 \mid 1), C(8 \mid 1 \mid 8)$

(i) Als Erstes stellen wir die Ebene in Parameterform auf mit dem Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ sowie den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

(ii) Als Zweites stellen wir nun die Koordinatenform mithilfe der Richtungsvektoren auf. Dazu berechnen wir den Normalenvektor mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$\text{Normalenvektor: } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatengleichung hat also die (vorläufige) Form $-5x - 4y + 2z = \ldots$
Darin setzen wir nun die Koordinaten des Stützvektors $A(6|1|3)$ ein: $-5 \cdot 6 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -28$. Eine Koordinatengleichung lautet:

$$-5x - 4y + 2z = -28$$

zu Aufgabe 71: Wandel die folgenden Ebenen in Parameterform um.

a) $E: 2x + 3y + 3z = 12$

Zuerst bestimmen wir die Spurpunkte und stellen anschließend aus den Punkten die Parametergleichung auf:

- Spurpunkt auf der x-Achse:

$$y = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6 \mid 0 \mid 0)$$

- Spurpunkt auf der y-Achse:

$$x = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3y + 3 \cdot 0 = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(0 \mid 4 \mid 0)$$

- Spurpunkt auf der z-Achse:

$$x = 0 \text{ und } y = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3z = 12 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0 \mid 0 \mid 4)$$

Wir stellen die Ebene in Parameterform auf mit dem Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ sowie den beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

b) $E: 3x + 2y = 18$

Zuerst bestimmen wir die Spurpunkte und stellen anschließend aus den Punkten die Parametergleichung auf:

- Spurpunkt auf der x-Achse:

$$y = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 3x + 2 \cdot 0 = 18 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6 \mid 0 \mid 0)$$

- Spurpunkt auf der y-Achse:

$$x = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2y = 18 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0 \mid 9 \mid 0)$$

- Spurpunkt auf der z-Achse:

$$x = 0 \text{ und } y = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 18 \Leftrightarrow 0 = 18 \quad ↯ \text{ (Widerspruch)}$$

Es liegen damit nur zwei Spurpunkte vor. Auf der z-Achse gibt es keinen Spurpunkt. Deshalb verläuft die Ebene parallel zur z-Achse und wir können einen Vektor, der parallel zu dieser Achse liegt, als Richtungsvektor verwenden. Mit dem Stützvektor $\overrightarrow{0A}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ folgt:

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

c) $E: 3x = 9$

Zuerst bestimmen wir die Spurpunkte und stellen anschließend aus den Punkten die Parametergleichung auf:

- Spurpunkt auf der x-Achse:

$$y = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = 9 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A(3 \mid 0 \mid 0)$$

- Spurpunkt auf der y-Achse:

$$x = 0 \text{ und } z = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 9 \Leftrightarrow 0 = 9 \quad ↯ \text{ (Widerspruch)}$$

- Spurpunkt auf der z-Achse:

$$x = 0 \text{ und } y = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 9 \Leftrightarrow 0 = 9 \quad ↯ \text{ (Widerspruch)}$$

Es liegt damit nur ein Spurpunkt vor. Auf der y-Achse und der z-Achse gibt es keinen Spurpunkt. Deshalb verläuft die Ebene parallel zur y-Achse und zur z-Achse und wir können

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Richtungsvektoren verwenden. Es ergibt sich als Parametergleichung:

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$$

B.6 zu Ebenen – Lagebeziehungen

zu Aufgabe 72: Berechne die Lagebeziehung von Gerade und Ebene. Berechne auch den Schnittpunkt, falls es einen gibt. Für die Lösung der auftretenden LGS darfst du deinen Taschenrechner verwenden.

a) $E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$ und $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$

Wir müssen die Ebene und die Gerade gleichsetzen und das Ergebnis zeilenweise auslesen und in ein LGS schreiben. Wir erhalten dabei folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 + r - 2s & = & -4 - 4t \\ 4 + r + 3s & = & 6 + 8t \\ 5 + s & = & 3 + 6t \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} r & = & -2 \\ s & = & 4 \\ t & = & 1 \end{array} \right|$$

Wir lösen das LGS im Taschenrechner und erhalten die Lösungen: $r = -2, s = 4$ und $t = 1$. Damit haben die Ebene und die Gerade einen Schnittpunkt. Durch Einsetzen von t in g erhalten wir den Schnittpunkt: $D(-8 \mid 14 \mid 9)$.

b) $E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R}$ und $g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$

Wir müssen die Ebene und die Gerade gleichsetzen und das Ergebnis zeilenweise auslesen und in ein LGS schreiben. Wir erhalten dabei folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 + r - 2s & = & 4 \\ 4 + r + 3s & = & 9 + 2{,}5t \\ 5 + s & = & -1 + 0{,}5t \end{array} \right|$$

Das LGS hat keine Lösung. Damit sind E und g parallel zueinander.

c) $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ und $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Wir müssen die Ebene und die Gerade gleichsetzen und das Ergebnis zeilenweise auslesen und in ein LGS schreiben. Wir erhalten dabei folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 + r - 2s & = & 6 + 6t \\ 4 + r + 3s & = & 3 - 14t \\ 5 + s & = & 4 - 4t \end{array} \right|$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Damit liegt g in E.

d) $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 59$ und $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Wir müssen nun die Geradengleichung zeilenweise auslesen und in die Ebene in Koordinatenform einsetzen. Es folgt:

$$\begin{array}{lrcll} & 2 \cdot (1 + t) + (2t) + 3 \cdot (-7 + 3t) & = & 59 & \\ \Leftrightarrow & 2 + 2t + 2t - 21 + 9t & = & 59 & \\ \Leftrightarrow & -19 + 13t & = & 59 & \mid +19 \\ \Leftrightarrow & 13t & = & 78 & \mid : 13 \\ \Leftrightarrow & t & = & 6 & \end{array}$$

Wir erhalten $t = 6$. Damit wird E wieder eindeutig von g durchstoßen. Durch Einsetzen von t in die Geradengleichung erhalten wir den Durchstoßpunkt $D(7 \mid 12 \mid 11)$.

e) $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$ und $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Auch hier lesen wir die Geradengleichung zeilenweise aus und erhalten:

$$\begin{array}{lrcll} & (2) + 2 \cdot (4t) + 3 \cdot (2t) & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 2 + 8t + 6t & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 2 + 14t & = & 9 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & 14t & = & 7 & \mid : 14 \\ \Leftrightarrow & t & = & 0{,}5 & \end{array}$$

Damit wird E wieder von g durchstoßen. Der Durchstoßpunkt ist $D(2 \mid 2 \mid 1)$.

zu Aufgabe 73: Gegeben ist die Ebene E und die Gerade g:

$$E: 6x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 82 \text{ und } g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

a) Zeige, ohne den Schnittpunkt zu berechnen, dass die Gerade g und die Ebene E nicht parallel verlaufen.

Wir können einfach zeigen, dass der Richtungsvektor der Geraden nicht orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= 6 \cdot (-1{,}5) + (-10) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -15 \neq 0$$

Das Skalarprodukt zeigt, dass $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{v}$ nicht orthogonal aufeinander stehen. g und E liegen also nicht parallel zueinander.

b) Berechne den Schnittpunkt.

Wir lesen die Geradengleichung von g zeilenweise aus und setzen die Werte für x_1, x_2 und x_3 in die Ebenengleichung in Koordinatenform ein:

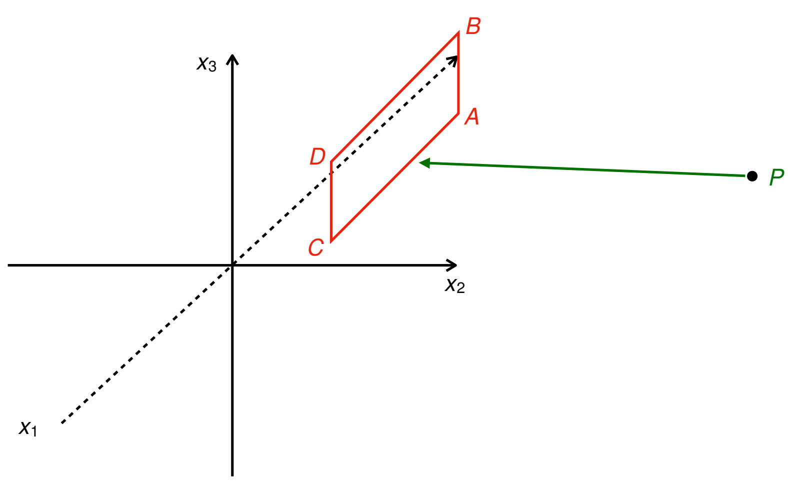
$$\begin{array}{rrcll} & 6 \cdot (2 - 1,5t) - 10 \cdot (-2 + t) + 2 \cdot (-5 + 2t) & = & 82 & \\ \Leftrightarrow & 12 - 9t + 20 - 10t - 10 + 4t & = & 82 & \\ \Leftrightarrow & 22 - 15t & = & 82 & \mid -22 \\ \Leftrightarrow & -15t & = & 60 & \mid : (-15) \\ \Leftrightarrow & t & = & -4 & \end{array}$$

Den Schnittpunkt D erhalten wir wieder durch Einsetzen von $t = -4$ in die Geradengleichung. Seine Koordinaten sind $D(8 \mid -6 \mid -13)$.

zu Aufgabe 74: Auf einem Übungsplatz steht ein Rechteck mit den Eckpunkten $A(4{,}5 \mid 1 \mid 0)$, $B(4{,}5 \mid 1 \mid 2{,}5)$ und $C(2 \mid 1 \mid 0)$. Ein Sportschütze schießt mit Pfeil und Bogen auf das Rechteck. Der Pfeil startet im Punkt $P(3 \mid 12 \mid 1{,}5)$ und fliegt in Richtung des Vektors

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Fertige eine Skizze an und bestimme die Koordinaten des Eckpunktes D des Rechtecks.



Die Koordinaten des Eckpunktes D belaufen sich auf $D(2 \mid 1 \mid 2{,}5)$.

b) Berechne, ob der Pfeil das Rechteck trifft.

Wir können das Rechteck als eine Ebene darstellen. Wir verwenden den Vektor $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren:

$$E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

Nun bilden wir die Geradengleichung:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Wir setzen nun die Gleichungen von E und g miteinander gleich. Es entsteht folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 4{,}5 - 2{,}5s &=& 3 - 1{,}5t \\ 1 &=& 12 - 10t \\ 2{,}5r &=& 1{,}5 + 2t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} r &=& 1{,}48 \\ s &=& 1{,}26 \\ t &=& 1{,}1 \end{array} \right|$$

Wir erhalten $r = 1{,}48, s = 1{,}26$ und $t = 1{,}1$. Damit durchstößt die Gerade g die Ebene E eindeutig. Entscheidend ist aber, ob die Gerade auch die Ebene im Bereich des Rechteckes trifft. Zu überprüfen ist also, ob $0 < r, s < 1$ gilt: Nur in diesem Fall trifft der Pfeil das Rechteck. Da bei uns $r = 1{,}48$ und $s = 1{,}26$ gilt, trifft der Pfeil das Rechteck nicht.

zu Aufgabe 75: Berechne die Lagebeziehungen der beiden Ebenen E_1 und E_2.

a) $E_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; r_1, s_1 \in \mathbb{R}$ und

$E_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}; r_2, s_2 \in \mathbb{R}$

Wir lesen die beiden Ebenen zeilenweise aus und schreiben das in ein LGS:

$$\left| \begin{array}{rcl} 4 - 2r_1 + 5s_1 &=& -3r_2 + 0{,}5s_2 \\ 1 + 0{,}5r_1 - 2s_1 &=& -4 + 2r_2 + 2s_2 \\ 3 + 0{,}5r_1 - s_1 &=& r_2 + 0{,}5s_2 \end{array} \right|$$

Wir erhalten die Lösungen: $r_1 = -2s_2 - 2; s_1 = 0,5s_2 - 7; r_2 = -2s_2 + 9; s_2 = s_2$.

Die beiden Ebenen schneiden sich also in einer Schnittgeraden. Wir setzen r_2 und s_2 in die Ebenengleichung von E_2 ein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2s_2 + 9) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} - s_2 \cdot \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Wir nennen s_2 nun noch in t um und erhalten folgende Geradengleichung:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6,5 \\ -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

b) $E_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ und $E_2 : 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 12$

Hier lesen wir die Ebenengleichung von E_1 zeilenweise aus und tragen sie in E_2 ein:

$$\begin{array}{lrcl} & 2 \cdot (2 + 4r) + 6 \cdot (2 - 2r + 2s) + 4 \cdot (-2 + r - 3s) &=& 12 \\ \Leftrightarrow & 4 + 8r + 12 - 12r + 12s - 8 + 4r - 12s &=& 12 \\ \Leftrightarrow & 8 &=& 12 \ ↯ \end{array}$$

Damit entsteht ein Widerspruch. Die Ebenen liegen also parallel zueinander.

c) $E_1 : 2x_1 + 4x_2 = 8$ und $E_2 : x_2 + 0{,}5x_3 = 3$

Wir nennen hier x_1 in t um und setzen t in die beiden Ebenen ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ 2t + 4x_2 &= 8 \\ x_2 + 0{,}5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Jetzt stellen wir die eine Gleichung nach x_2 um: $x_2 = 2 - \frac{1}{2}t$. Nun setzen wir x_2 in die nächste Gleichung ein: $x_3 = 2 + t$. Damit schneiden sich E_1 und E_2 also in einer Geraden.

Die Schnittgerade erhalten wir durch zeilenweises Einsetzen in die Geradengleichung:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 - \frac{1}{2}t \\ 2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

B.7 zu Abstände

zu Aufgabe 76: Ein Wellensittich fliegt entlang folgender Geraden

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}.$$

Er startet bei $t = 0$ und fliegt mit konstanter Geschwindigkeit. Alle Koordinaten in Meter, Zeit (also Parameter t) in Minuten.

Im Punkt $P(-3 \mid 3 \mid 4)$ befindet sich eine feste Vogelfalle, in die der Wellensittich nicht fliegen soll.

a) Berechne den Abstand zwischen des Startpunktes des Wellensittichs und der Falle.

Da der Wellensittich zum Zeitpunkt $t = 0$ startet, kann als der Startpunkt des Wellensittichs der Stützvektor interpretiert werden. Damit ist der Startpunkt $S(2 \mid -5 \mid 3)$.

Wir berechnen nun also die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{5^2 + (-8)^2 + (-1)^2} \approx 9{,}49 \text{ [m]}$$

Der Abstand zwischen Wellensittich und Falle beträgt also ungefähr 9,49 Meter.

b) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit sich der Wellensittich bewegt.

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, setzen wir für $t = 1$ ein. Dadurch wissen wir wie viel Meter pro Minute der Wellensittich fliegt.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-7 \mid 7 \mid 6)$$

Wir berechnen nun also die Länge des Vektors $\overrightarrow{SA}$:

$$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2 + 3^2} \approx 15{,}30 \text{ [m]}$$

Damit fliegt der Wellensittich mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 15,30 m/min.

c) Berechne, an welchem Punkt der Wellensittich den Abstand 9 m zur Falle hat.

Der Trick bei diesem Aufgabenteil besteht darin, einen sogenannten „allgemeinen Geradenpunkt“ zu betrachten und einen Verbindungsvektor von diesem „allgemeinen Geradenpunkt“ zum Hindernis P zu konstruieren.

Für den allgemeinen Geradenpunkt in Vektorschreibweise lesen wir die Gerade g zeilenweise aus:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 2-9t \\ -5+12t \\ 3+3t \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} (2-9t)-(-3) \\ (-5+12t)-3 \\ (3+3t)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-9t \\ -8+12t \\ -1+3t \end{pmatrix}$$

Wir tun nun so, als würden wir die Länge von $\overrightarrow{PB}$ berechnen, setzen diese Länge aber gleichzeitig mit 9 gleich:

$$\begin{array}{rrcll} & 9 & = & \sqrt{(5-9t)^2 + (-8+12t)^2 + (-1+3t)^2} & \mid \text{quadrieren} \\ \Leftrightarrow & 81 & = & (5-9t)^2 + (-8+12t)^2 + (-1+3t)^2 & \\ \Leftrightarrow & 81 & = & 25 - 90t + 81t^2 + 64 - 192t + 144t^2 + 1 - 6t + 9t^2 & \mid -81 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 234t^2 - 288t + 9 & \mid : 234 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & t^2 - \frac{16}{13}t + \frac{1}{26} & \mid pq\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow & t_1 \approx 1{,}2 & \vee & t_2 \approx 0{,}03 & \end{array}$$

Wir setzen nun beispielsweise die erste Möglichkeit für t, also t_1, in die Gerade ein und erhalten einen Punkt, der von der Falle genau 9 Meter entfernt ist:

$$G(-5{,}8 \mid 6{,}4 \mid 2{,}6)$$

d) Berechne den geringsten Abstand vom Wellensittich zur Falle.

Für diesen Aufgabenteil verwendet man am besten das Lotfußpunktverfahren.

Allgemeiner Geradenpunkt: $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2-9t \\ -5+12t \\ 3+3t \end{pmatrix}$.

Nun muss gelten: $\overrightarrow{PB} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-9t \\ -8+12t \\ -1+3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{8}{13} \approx 0{,}62$ [min].

Damit ist der Lotfußpunkt L : $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{8}{13} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{46}{13} \\ \frac{31}{13} \\ \frac{63}{13} \end{pmatrix}$, also $L\left(-\dfrac{46}{13} \,\middle|\, \dfrac{31}{13} \,\middle|\, \dfrac{63}{13}\right)$.

Der geringste Abstand von der Flugbahn des Wellensittichs zur Falle beträgt:

$$|\overrightarrow{LP}| = \sqrt{\left(-3 + \frac{46}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{31}{13}\right)^2 + \left(4 - \frac{63}{13}\right)^2} \approx 1{,}17 \text{ [m]}$$

Der kleinste erreichte Abstand beträgt 1,17 [m]. Er wird nach ungefähr 0,62 Minuten nach Abflug erreicht.

zu Aufgabe 77: Berechne den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.

a) $E: -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3{,}5$ und $P(4 \mid 4 \mid 5)$.

Hier verwenden wir am besten die Hesse'sche Normalenform:

$$d(P;E) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}} = \frac{|(-2) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 3{,}5|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (3)^2}} \approx 1{,}10 \text{ [LE]}$$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$ und $P(4 \mid 4 \mid 5)$.

Wir verwenden wieder die Hesse'sche Normalenform. Dazu müssen wir zur Ebene E, die bisher nur in Parameterform gegeben ist, auch noch eine Koordinatengleichung ermitteln.

Zunächst bilden wir einen Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 38 \\ -27 \end{pmatrix}$.

Daraus bilden wir mithilfe des Punktes $(1 \mid 2 \mid 3)$ (Stützvektor von E) die Koordinatengleichung:

$$E: -7x_1 + 38x_2 - 27x_3 = -12$$

Zur Abstandsberechnung nutzen wir nun wieder die gegebene Formel:

$$d(P;E) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}} = \frac{|(-7) \cdot 4 + 38 \cdot 4 + (-27) \cdot 5 + 12|}{\sqrt{(-7)^2 + (38)^2 + (-27)^2}} \approx 0{,}02 \text{ [LE]}$$

zu Aufgabe 78: Durch die Punkte $A(12 \mid 12 \mid 4), B(16 \mid 20 \mid 8), C(1 \mid 7 \mid 1)$ und $D(2 \mid 12 \mid 12)$ ist eine Pyramide gegeben. Die Grundfläche der Pyramide ist dreieckig. Berechne den Abstand zwischen den Kanten AB und CD.

Konstruiert man eine Gerade g durch die Punkte A und B sowie eine Gerade h durch die Punkte C und D, so erhalten wir zwei windschiefe Geraden. Gesucht ist der kleinste Abstand zwischen diesen beiden Geraden.

$$g: \vec{x} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 16-12 \\ 20-12 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \vec{C} + s \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 12-7 \\ 12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

Wir wenden nun das Prinzip der Hilfsebene an:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -40 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Wir entscheiden uns dazu, dass die Gerade g in der Ebene E liegen soll:

$$E: 68x_1 - 40x_2 + 12x_3 = 384$$

Nun berechnen wir mithilfe der Hesse'schen Normalenform den kürzesten Abstand von einem beliebigen Punkt der Geraden h (also z.B. deren Stützvektor) zur Hilfsebene E:

$$d(P;E) = \frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}} = \frac{|68 \cdot 1 + (-40) \cdot 7 + 12 \cdot 1 - 384|}{\sqrt{68^2 + (-40)^2 + 12^2}} \approx 7{,}32 \text{ [LE]}$$

Der (kürzeste) Abstand zwischen den Kanten AB und CD beträgt damit ungefähr 7,32 Längeneinheiten.

C Stochastik

C.1 zu Zufallsexperimente

zu Aufgabe 79: Louis und Tabea werfen eine Münze einmal.

a) Begründe warum der Münzwurf ein Zufallsexperiment ist?

Der Münzwurf ist ein Zufallsexperiment, da der Ausgang des Experiments zufällig ist.

b) Gib einen geeigneten Ergebnisraum Ω an.

$$\Omega = \{\text{„Kopf“}, \text{„Zahl“}\} \quad \text{oder} \quad \Omega = \{0, 1\}$$

mit 0 für „Kopf“ und 1 für „Zahl“.

c) Stelle das Ereignis E: „Zahl“ als Menge dar und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(E)$.

$$E = \{\text{„Zahl“}\} \quad \text{bzw.} \quad E = \{1\} \quad \text{und} \quad P(E) = \frac{1}{2}$$

zu Aufgabe 80: Hannelore und Inge möchten eine Münze drei Mal hintereinander werfen.

a) Gib einen geeigneten Ergebnisraum Ω an. Nutze dabei die Ergebnisschreibweise mit Klammern, also z.B. (K, K, K) für drei Mal Kopf.

Als Ergebnisraum ergibt sich:

$$\Omega = \{(Z, Z, Z), (Z, Z, K), (K, Z, Z), (Z, K, Z), (K, K, K), (K, K, Z), (Z, K, K), (K, Z, K)\}$$

b) Gib ein Beispiel für ein unmögliches Ereignis an.

Zum Beispiel E: „einmal Kopf und zweimal Zahl und Kopf gleichzeitig“

c) Bestimme mithilfe des Ergebnisraums die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass 0-mal, 1-mal, 2-mal bzw. 3-mal Kopf fällt. Schreibe $P(\text{„0-mal Kopf“}), P(\text{„1-mal Kopf“}), \ldots$

Da wir mit einer fairen Münze werfen, liegt eine Laplace-Wahrscheinlichkeit vor:

$P(\text{„0-mal Kopf“}) = \frac{1}{8}$ von den 8 möglichen Ergebnissen ist nur (Z, Z, Z) für uns *günstig*.

$P(\text{„1-mal Kopf“}) = \frac{3}{8}$ von den 8 möglichen Ergebnissen sind nur (K, Z, Z),(Z, Z, K) und (Z, K, Z) für uns *günstig*.

$P(\text{„2-mal Kopf“}) = \frac{3}{8}$ von den 8 möglichen Ergebnissen sind nur (K, K, Z),(K, Z, K) und (Z, K, K) für uns *günstig*.

$P(\text{„3-mal Kopf“}) = \frac{1}{8}$ von den 8 möglichen Ergebnissen ist nur (K, K, K) für uns *günstig*.

Anmerkung: Es ist interessant zu sehen, dass die oben errechneten Wahrscheinlichkeiten in der Summe 1 ergeben. Warum ist das so?

d) Stelle das Ereignis E_1: „genau 2-mal Zahl“ konkret als Menge dar und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$.

$$E_1 = \{(\mathrm{K}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z}), (\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{K}), (\mathrm{Z}, \mathrm{K}, \mathrm{Z})\} \text{ mit } P(E_1) = \frac{3}{8}$$

e) Stelle das Ereignis E_2: „mindestens einmal Kopf“ konkret als Menge dar und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$.

$$E_2 = \{(\mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K}), (\mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{Z}), (\mathrm{Z}, \mathrm{K}, \mathrm{K}), (\mathrm{K}, \mathrm{Z}, \mathrm{K}), (\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{K}), (\mathrm{K}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z}), (\mathrm{Z}, \mathrm{K}, \mathrm{Z})\} = \Omega \setminus \{(\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z})\}$$

Hier ist es einfacher, die Gegenwahrscheinlichkeit von E_2 auszurechnen, da diese einfach leichter zu berechnen ist:

$$P(E_2) = 1 - P\left(\overline{E_2}\right) = 1 - P(\text{„kein Mal Kopf“}) = 1 - P(\{(\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z})\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

f) Beschreibe das Ereignis $E_1 \cap E_2$ in Worten und berechne $P(E_1 \cap E_2)$.

Das Ereignis $E_1 \cap E_2$ tritt genau dann ein, wenn E_1 und E_2 gleichzeitig eintreten. In Worten bedeutet dies: Es sollen genau zwei Zahlen und genau ein Kopf auftreten. Dafür kommen die Ergebnisse (Z, Z, K), (Z, K, Z) und (K, Z, Z) infrage und es gilt:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{8}$$

g) Beschreibe das Ereignis $E_1 \cup E_2$ in Worten und berechne $P(E_1 \cup E_2)$.

Das Ereignis $E_1 \cup E_2$ tritt genau dann ein, wenn E_1 oder E_2 eintreten. In Worten bedeutet dies: Es sollen entweder genau zwei Zahlen oder mindestens ein Kopf auftreten. Dafür kommen alle Ergebnisse außer (Z, Z, Z) infrage. In unserem Fall entspricht das Ereignis $E_1 \cup E_2$ also gerade E_2 und es gilt (wieder mit der Formel für Laplace-Wahrscheinlichkeiten):

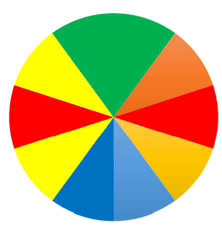
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_2) = \frac{7}{8}$$

zu Aufgabe 81: Handelt es sich bei den beiden Zufallsexperimenten um ein Laplace-Experiment?

a) Drehen des folgenden Glücksrads:

Bei diesem Zufallsexperiment handelt es sich eindeutig um ein Laplace-Experiment: Alle Flächen haben dieselbe Größe und jede Farbe tritt nur einmal auf.

b) Drehen des folgenden Glücksrads:



Bei diesem Zufallsexperiment handelt es sich eindeutig **nicht** um ein Laplace-Experiment: Die Felder haben unterschiedliche Größen und manche Farben treten häufiger auf als andere Farben.

zu Aufgabe 82: Gegeben ist ein Kartenspiel mit 32 Karten (Normales Skat-Spiel mit Ass, König, Dame, Bube, 10, 9, 8, 7). Es werden immer einzelne Karten gezogen.

Berechne, welche Wahrscheinlichkeit die folgenden Ereignisse haben und begründe deine Rechnung.

Ereignis: Die gezogene Karte ist. . .

a) Kreuz-, Pik-oder Karo-König.

$$P(\text{„ein Kreuz-, Pik-oder Karo-König“}) = \frac{3}{32}$$

, denn im Spiel gibt es einen Kreuz-König, einen Pik-König und einen Karo-König.

b) keine Zehn.

$$P(\text{„keine Zehn“}) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

Hier berechnen wir die Gegenwahrscheinlichkeit: Wir ziehen also einfach die Wahrscheinlichkeit für „eine Zehn“ von 1 ab.

c) eine Zehn oder eine Herz-Karte.

$$P(\text{„eine Zehn oder eine Herz-Karte“}) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Wir zählen dazu alle Zehnen (das sind vier Stück) und alle Herz-Karten (das sind acht Stück) und addieren ihre Wahrscheinlichkeit. Da wir aber so die Herz-Zehn doppelt zählen würden, müssen wir einmal $\frac{1}{32}$ abziehen.

d) eine Karo-Karte.

$$P(\text{„eine Karo-Karte“}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

, da genau 8 Karten des Spiels Karo-Karten sind.

e) ein Ass, ein König oder eine Dame.

$$P(\text{„ein Ass, eine König oder ein Dame“}) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{12}{32} = \frac{6}{16}$$

Wir addieren die Wahrscheinlichkeiten für Ass, König und Damen. Es gibt von jeder Karte vier Stück.

f) weder eine Herz-Karte noch ein König.

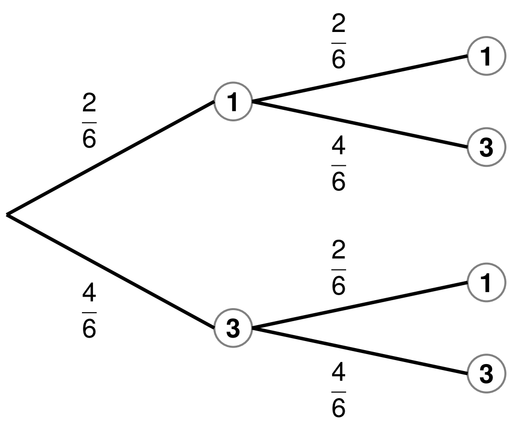
$$P(\text{„weder eine Herz-Karte noch ein König“}) = 1 - \frac{8}{32} - \frac{4}{32} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$$

Auch hier berechnen wir wieder die Gegenwahrscheinlichkeit: Wir ziehen von 1 die Wahrscheinlichkeit für eine Herz-Karte und die Wahrscheinlichkeit für einen König ab, müssen dann aber die Wahrscheinlichkeit für einen Herz-König wieder addieren, da wir diese Wahrscheinlichkeit doppelt abgezogen haben.

C.2 zu Baumdiagramme

zu Aufgabe 83: Josef wirft einen Würfel, der 4 Dreien und 2 Einsen trägt, zweimal.

a) Zeichne ein passendes Baumdiagramm.



$$(1,1) \quad P((1,1)) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$(1,3) \quad P((1,3)) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$(3,1) \quad P((3,1)) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$(1,3) \quad P((3,3)) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

1. Stufe **2. Stufe** **Ergebnisse & Pfadwahrscheinlichkeit**

b) Handelt es sich um ein Experiment „mit Zurücklegen“ oder „ohne Zurücklegen“?

Es handelt sich um ein Experiment „mit Zurücklegen“, da sich die Wahrscheinlichkeiten von der 1. Stufe zur 2. Stufe nicht verändern.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme gerade ist?

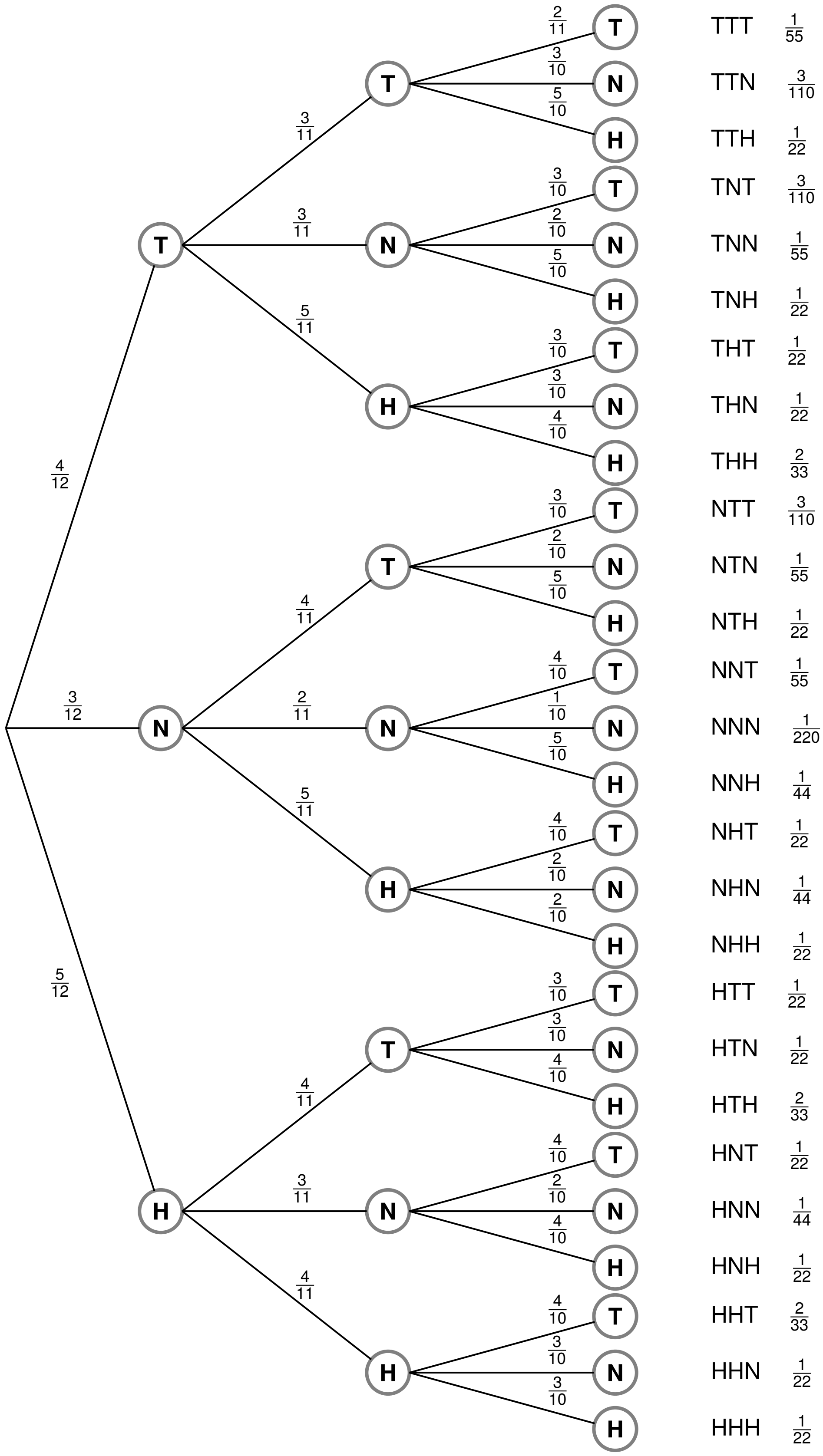
Für das Ereignis E: „Augensumme gerade“ kommen die Kombinationen (1,1), (3,1), (1,3) und (3,3) infrage. Also schreibt man: $E = \{(1,1), (1,3), (3,1)(3,3)\}$.

Es gilt nach der Pfad-und der Summenregel:

$$P(E) = P((1,1)) + P((1,3)) + P((3,1)) + P((3,3)) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1 = 100\%$$

zu Aufgabe 84: In einer Shishabar gibt es ein Gewinnspiel, bei dem die Kunden kostenlosen Tabak gewinnen können. In einem Korb liegen 4 Dosen Traubeminze, 3 Dosen nikotinfreier Tabak und 5 Dosen Himbeere. Der Kunde muss mit verbundenen Augen drei Dosen ohne Zurücklegen aus dem Korb ziehen. Wenn er drei gleiche Dosen zieht, darf er die drei Dosen behalten.

Zeichne ein geeignetes Baumdiagrammen mit Ergebnissen und Pfadwahrscheinlichkeiten und beantworte die folgenden Fragen. Gib die Wahrscheinlichkeiten als gekürzten Bruch sowie als Prozentzahl an.


TTT 1/55
TTN 3/110
TTH 1/22
TNT 3/110
TNN 1/55
TNH 1/22
THT 1/22
THN 1/22
THH 2/33
NTT 3/110
NTN 1/55
NTH 1/22
NNT 1/55
NNN 1/220
NNH 1/44
NHT 1/22
NHN 1/44
NHH 1/22
HTT 1/22
HTN 1/22
HTH 2/33
HNT 1/22
HNN 1/44
HNH 1/22
HHT 2/33
HHN 1/22
HHH 1/22

Mit welcher Wahrscheinlichkeit...

a) darf der Kunde drei Dosen Himbeere mitnehmen?

$E_{1:}$: „drei Mal Himbeere“ $\rightarrow E_1 = \{(\text{HHH})\}$

Mit der Pfadregel folgt:

$$P(E_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22} \approx 0{,}0455 = 4{,}55\%$$

Antwort: Der Kunde darf mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 4,55% drei Dosen Himbeere mitnehmen.

b) gewinnt der Kunde?

E_2 : „Gewinn“ $\rightarrow E_2 = \{(\text{HHH}), (\text{NNN}), (\text{TTT})\}$

Mit der Pfad-und Summenregel folgt:

$$P(E_2) = \frac{1}{22} + \frac{1}{220} + \frac{1}{55} \approx 0{,}0682 = 6{,}82\%$$

Antwort: Der Kunde gewinnt zu 6,82%.

c) ist die dritte Dose von einer anderen Sorte, wenn die ersten beiden Dosen von derselben Sorte sind?

E_3: „dritte Dose von einer anderen Sorte als die ersten beiden“

$\rightarrow E_3 = \{(\text{TTN}), (\text{TTH}), (\text{NNT}), (\text{NNH}), (\text{HHT}), (\text{HHN})\}$

Mit der Pfad- und Summenregel folgt:

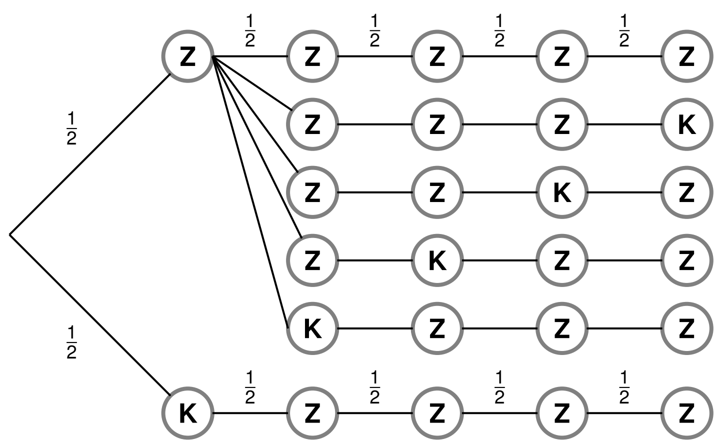
$$P(E_3) = \frac{3}{110} + \frac{1}{22} + \frac{1}{55} + \frac{1}{44} + \frac{2}{33} + \frac{1}{22} = \frac{29}{132} \approx 0{,}2197 = 21{,}97\%$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die dritte Dose von einer anderen Sorte ist als die beiden ersten Dosen, liegt bei ungefähr 21,97%.

zu Aufgabe 85: Kai wirft fünf Mal eine Spielmünze. Auf der einen Seite ist ein Zebra und auf der anderen Seite ist eine Kartoffel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei Mal Kartoffel sieht?

Zeichne ein geeignetes Baumdiagramm und begründe, weshalb man nicht unbedingt das gesamte Baumdiagramm zeichnen muss.

Wir möchten die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „mindestens zwei Mal Kartoffel“ berechnen. Es ist einfacher, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{E}$:„kein Mal Kartoffel oder ein Mal Kartoffel“ zu berechnen. Dadurch reicht es folgendes Baumdiagramm zu zeichnen:



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

Mit der Pfad-und Summenregeln können wir folgendes berechnen:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(6 \cdot \frac{1}{32}\right) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} = 0{,}8125 = 81{,}25\%$$

Antwort:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kai mindestens zwei Mal Kartoffel sieht, liegt also bei 81,25%.

zu Aufgabe 86: Josef spielt ein Spiel mit Johannes und Niklas. Er hat eine Kiste mit zwei Bieren vorbereitet (1 Bier mit rotem Etikett, 1 Bier mit grünem Etikett). Josef zieht ein Bier aus der Kiste, schreibt sich die Farbe des Etiketts auf und legt das Bier wieder in die Kiste. Danach legt er ein Bier mit einem blauen Etikett in die Kiste. Nun zieht auch Johannes ein Bier, schreibt sich Farbe auf und legt das Bier wieder zurück in die Kiste. Er legt nun noch ein Bier mit einem gelben Etikett in die Kiste. Schließlich zieht Niklas ein Bier.

a) Zeichne ein geeignetes Baumdiagramm mit den entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten.

   Du findest das Diagramm auf der nächsten Seite.

   Wichtig: Dies hier ist ein Beispiel dafür, dass sich die **Zweigwahrscheinlichkeiten ändern**, obwohl wir ein Experiment „mit Zurücklegen" modellieren.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Josef, Johannes und Niklas jeweils das Bier mit demselben Etikett gezogen haben?

   E_1: „alle drei Etiketts gleichfarbig" $\rightarrow E_1 = \{(\text{RRR}), (\text{GrGrGr})\}$

$$P(E_1) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833 = 8{,}33\%$$

   Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Josef, Johannes und Niklas jeweils ein Bier mit demselben Etikett gezogen haben, liegt bei ungefähr 8,33%.

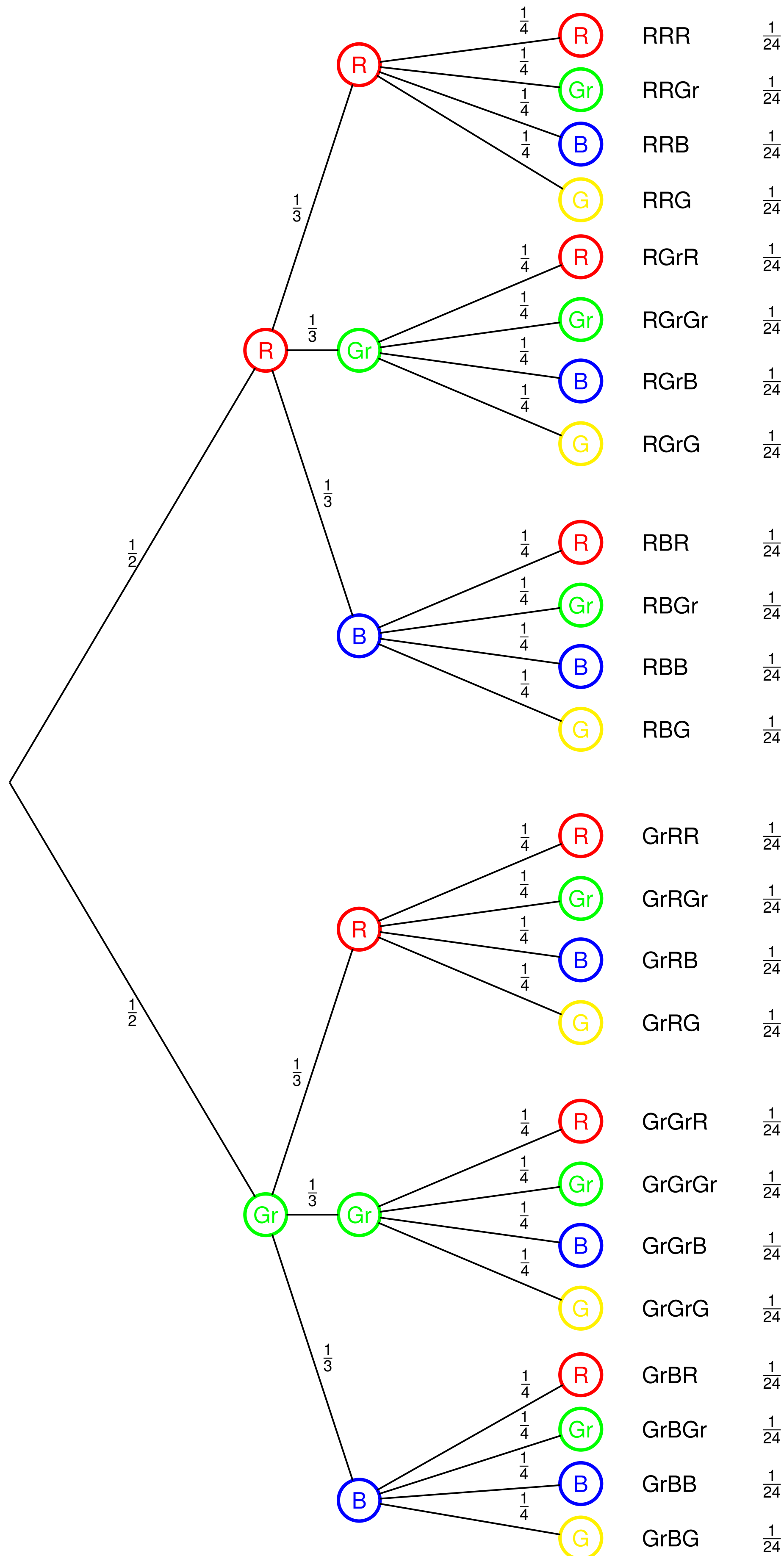
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nie das Bier mit dem roten Etikett gezogen wird?

   Dazu müssen wir alle Pfade notieren, in denen kein rotes Etikett existiert.

$$E_2\text{: „nie rot"} \rightarrow E_2 = \{(\text{GrGrGe}), (\text{GrGrGr}), (\text{GrGrB}), (\text{GrBGr}), (\text{GrBB}), (\text{GrBGe})\}$$

$$\Rightarrow P(E_2) = 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4} = 0{,}2500 = 25\%$$

   Antwort:
   Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nie ein rotes Etikett gezogen wird, liegt bei 25%.



1/2
1/2
1/3
1/3
1/3
1/4
R
Gr
B
G
RRR 1/24
RRGr 1/24
RRB 1/24
RRG 1/24
RGrR 1/24
RGrGr 1/24
RGrB 1/24
RGrG 1/24
RBR 1/24
RBGr 1/24
RBB 1/24
RBG 1/24
GrRR 1/24
GrRGr 1/24
GrRB 1/24
GrRG 1/24
GrGrR 1/24
GrGrGr 1/24
GrGrB 1/24
GrGrG 1/24
GrBR 1/24
GrBGr 1/24
GrBB 1/24
GrBG 1/24

C.3 zu Kombinatorik

zu Aufgabe 87: Wie viele Kennzeichen mit zwei Mittelbuchstaben und vier Ziffern sind in Berlin möglich?

Das Alphabet verfügt über 26 Buchstaben und es gibt 10 verschiedene Zahlen (außer bei der ersten Ziffer, dort gibt es nur 9 Möglichkeiten, da an ihrer Stelle keine 0 bzw. nicht nichts stehen darf). Somit gilt:

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.084.000$$

Es gibt 6.084.000 Möglichkeiten.

zu Aufgabe 88: In einer Dose mit 46 verschiedenen Keksen werden 9 Kekse gegessen. Wie viele mögliche verschiedene Kombinationen der 9 Kekse gibt es?

Es handelt sich um eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

Wir berechnen daher für $n = 46$ und $k = 9$, dass es

$$\binom{46}{9} = \frac{46!}{(46-9)! \cdot 9!} = 1.101.716.330$$

mögliche Abordnungen gibt. Alternativ können wir auch nCr(46, 9) in den Taschenrechner eintippen und erhalten das Ergebnis.

zu Aufgabe 89: Johannes ist ein Bücherwurm. Er hat 12 Bücher über Mathe, darunter fünf über Analysis, drei über Lineare Algebra und vier über Stochastik.

Bei Johannes Zufallsexperiment handelt es sich um eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen, da er jedes Buch nur einmal unterbringen kann und die Position der Bücher ja eine tragende Rolle spielt.

a) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung hat er?

   Nach der zugehörigen Formel hat Johannes also

   $$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$$

   Möglichkeiten, seine Bücher zu sortieren.

b) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn die Bücher nicht thematisch vermischt werden sollen?

   Wenn die Bücher nicht thematisch vermischt werden dürfen, hat Johannes $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 4! = 103.680$ Möglichkeiten zur Anordnung. 3! Möglichkeiten die Themenblöcke zu vertauschen. Innerhalb der einzelnen Themenblöcke kann dann auch noch jedes Buch frei bewegt werden, weswegen wir mit 5!, mit 3! und mit 4! für die jeweiligen Themenblöcke multiplizieren.

zu Aufgabe 90: Josef möchte eine Tüte mit Kaubonbons erstellen. Er kann zwischen 10 verschiedenen Kaubonbonsorten wählen. Ein Kaubonbon wiegt 5g und er möchte eine Tüte mit 100g erstellen. Auf wie viele verschiedene Weisen kann Josef diese Tüte zusammenstellen? Dabei wählt er die Kaubonbons rein zufällig die Reihenfolge spielt eine Rolle, da die Kaubonbons in einer Schachtel angeordnet werden.

Bei Josefs Kaubonbonwahl handelt es sich um eine geordnete Stichprobe mit Zurücklegen.

Zunächst berechnen wir, dass wir die 100g-Tüte mit 20 x 5g-Bonbons füllen können $\left(\frac{10^2}{5} = 20\right)$.

Wir berechnen daher für die Bonbonauswahl, dass es

$$10^{20} = 100.000.000.000.000.000.000$$

Möglichkeiten gibt.

zu Aufgabe 91: Josef, Johannes und Paul haben ein Pokerdeck und überlegen sich ein paar Wahrscheinlichkeiten. Das Deck besteht aus 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass genau einmal in jeder der vier Farben (Kreuz, Pik, Herz, Karo). Jeder Spieler erhält fünf Karten.

Bevor man diese Aufgabe angeht, sollte man sich bewusst machen, dass es insgesamt

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5}$$

Möglichkeiten gibt, die Karten auf den drei Spielerhänden anzuordnen.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

a) Josef erhält einen *Flush*, d.h. alle Karten haben dieselbe Spielfarbe.

Für Josefs *Flush* gibt es insgesamt

$$4 \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5}$$

Möglichkeiten, da er aus vier Farben und 13 zugehörigen Karten genau 5 auf der Hand haben muss. Die anderen beiden Spieler erhalten dann noch einmal 5 aus 47 und 5 aus 42.

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen teilen wir die Anzahl der Möglichkeiten einen *Flush* zu erhalten durch die gesamten Möglichkeiten die Karten zu verteilen:

$$P(\text{„Josef } \textit{Flush}\text{“})) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5}}{\binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5}} = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}00198 \approx 0{,}2\%$$

b) Johannes erhält einen Vierling und Paul einen *Royal Flush* (10, Bube, Dame, König, Ass in einer Farbe).

Für dieses Ereignis gibt es insgesamt

$$4 \cdot 8 \cdot \binom{43}{1} \cdot \binom{42}{5}$$

Möglichkeiten. Das lässt sich dadurch erklären, dass es für den *Royal Flush* genau vier Möglichkeiten gibt. Wenn Paul schon einen *Royal Flush* hat, so kann Johannes Vierling also nur noch aus 2en, 3en, 4en, 5en, 6en, 7en, 8en oder 9en bestehen (also acht Möglichkeiten). Wir multiplizieren 4 und 8 und dazu noch

$$\binom{43}{1}$$

für die verbleibende Karte von Johannes sowie

$$\binom{42}{5}$$

für die Hand von Josef. Für die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}
&P(\text{„Johannes Vierling \& Paul } \textit{Royal Flush}\text{“})\\
&= \frac{4\cdot 8\cdot \binom{43}{1}\cdot\binom{42}{5}}{\binom{52}{5}\cdot\binom{47}{5}\cdot\binom{42}{5}} = \frac{4\cdot 8\cdot \binom{43}{1}}{\binom{52}{5}\cdot\binom{47}{5}}\\
&= 0{,}000000000345 \approx 0{,}00000003\%
\end{aligned}$$

C.4 zu Bedingte Wahrscheinlichkeit & Unabhängigkeit

zu Aufgabe 92: Ein Getränkehersteller hat einen neuen Energydrink entwickelt. Die Wirkung des Energydrinks soll jetzt an Fußballern getestet werden. Dabei kamen folgende Daten heraus:

1. 70% der Fußballer erhielten den Energydrink mit Koffein, die übrigen erhielten einen Energydrink ohne Koffein.
2. Nach einer Stunde trat bei der Hälfte der Fußballer eine Leistungssteigerung ein.
3. 29% der Fußballer erhielten ein Energydrink ohne Koffein und verspürten keine Leistungssteigerung.

Erstelle eine Vierfeldertafel.

Die gegebenen Werte tragen wir in eine Vierfeldertafel ein:

- Da es sich bei 1. und 2. um Einzel-Wahrscheinlichkeiten handelt, müssen wir diese gegebenen Wahrscheinlichkeiten in die Randfelder eintragen.
- Da die Gesamtsumme der Randfelder 1 ergeben soll, können wir den fehlenden Wert einfach berechnen.
- Bei 3. handelt es sich bereits um eine *und*-Wahrscheinlichkeit, die wir direkt in eines der weißen Felder eintragen können.
- Da in den Randfeldern immer die Zeilen- und Spaltensummen stehen, können wir die Wahrscheinlichkeiten berechnen.
- Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich ebenfalls durch die Differenzbildung.

	Koffein	**kein Koffein**	
Leistungssteigerung	0,49	0,01	**0,50**
keine Leistungssteigerung	0,21	0,29	**0,50**
	0,70	**0,30**	**1**

zu Aufgabe 93: In einer Reisegruppe mit 60 Teilnehmern fahren 32 mit der Bahn zum Startpunkt der Reise, die restlichen Teilnehmer reisen nicht mit der Bahn an. 60% der Teilnehmer sind weiblich, 40% sind männlich. 12 weibliche Reisende reisen mit der Bahn zum Startpunkt.

a) Stelle eine Vierfeldertafel auf.

Wieder tragen wir die Häufigkeiten in eine Vierfeldertafel ein. Wir arbeiten hier mit absoluten Häufigkeiten:

	Bahn	**nicht Bahn**	
männlich	20	4	**24**
weiblich	12	24	**36**
	32	**28**	**60**

b) Wie viele männliche Teilnehmer reisen mit der Bahn an?

Wir können dies oben links in der Vierfeldertafel ablesen: 20.

zu Aufgabe 94: Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

a) Ein Würfel wird zweimal geworfen. A sei das Ereignis, dass im zweiten Wurf eine 4 fällt. B sei das Ereignis, dass die Augensumme 9 beträgt.

- A: „im zweiten Wurf eine 4“

$$A = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\} \to P(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- B: „Augensumme 9“

$$B = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} \to P(B) = \frac{4}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- $A \cap B$: „im zweiten Wurf eine 4 und Augensumme 9“

$$A \cap B = \{(5,4)\} \to P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Damit sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, denn es gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$$

b) Ein Würfel wird zweimal geworfen. A: „Augensumme 8“, B: „verschiedene Augenzahl in beiden Würfen“.

- A: „Augensumme 8“

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \to P(A) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

- B: „verschiedene Augenzahl in beiden Würfen“

$$P(B) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$$

- $A \cap B$: „Augensumme 8 und verschiedene Augenzahlen in beiden Würfen“

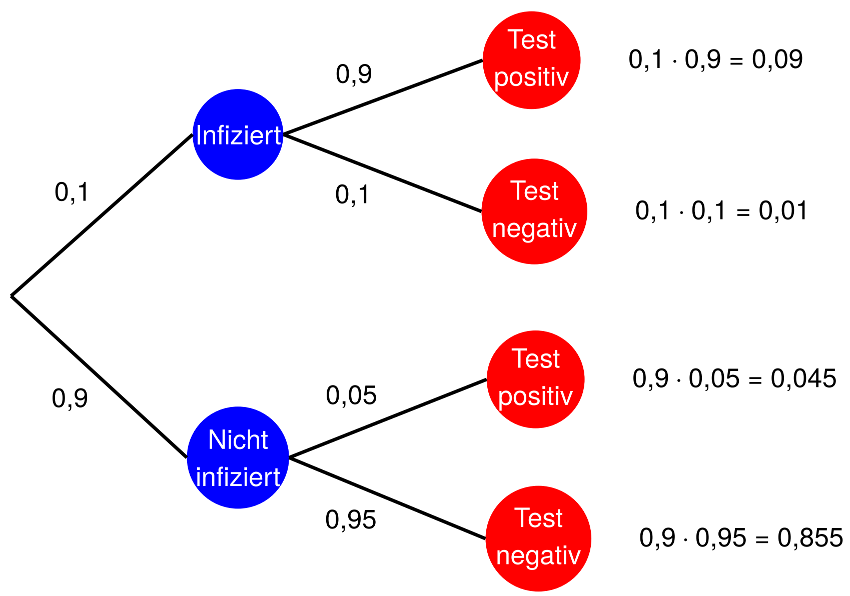
$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Damit sind die Ereignisse A und B stochastisch abhängig, denn es gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{30}{36} = \frac{25}{216} \neq \frac{1}{9} = P(A \cap B)$$

zu Aufgabe 95: Um einen Virus nachzuweisen, wurde ein Schnelltest erfunden. Es wird vermutet, dass 10% der Menschen mit dem Virus infiziert sind. Leider ist der Test nicht perfekt. Er zeigt bei einem erkrankten Menschen nur zu 90% an, dass dieser auch wirklich das Virus hat. Außerdem werden 5% positiv getestet, obwohl sie das Virus nicht haben.

a) Zeichne ein passendes Baumdiagramm (mit den beiden Merkmalen infiziert/nicht infiziert und Test positiv/Test negativ).

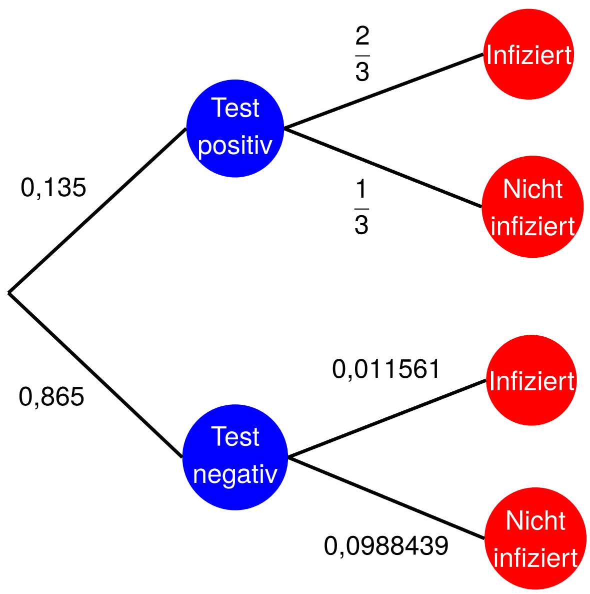


b) Erstelle die Vierfeldertafel und das umgekehrte Baumdiagramm zu Teil a) (d.h. ein Baumdiagramm, bei dem die Stufen in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen werden).

Mithilfe des in a) gezeichneten Baumdiagramms kann man nun die Vierfeldertafel aufstellen. Alle Werte der weiß hinterlegten Felder sowie die Werte 0,1 und 0,9 können wir ablesen und eintragen; die Werte 0,135 und 0,865 erhalten wir dann durch die entsprechende Addition.

	Infiziert	**nicht infiziert**	
Test positiv	0,09	0,045	**0,135**
Test negativ	0,01	0,855	**0,865**
	0,1	**0,9**	**1**

Mit den Daten aus der Vierfeldertafel können wir nun einfach das umgekehrte Baumdiagramm erstellen:



$$\mathbf{0{,}9} = 0{,}135 \cdot x$$
$$\Rightarrow x = \frac{0{,}09}{0{,}135} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{0{,}045} = 0{,}135 \cdot x$$
$$\Rightarrow x = \frac{0{,}045}{0{,}135} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{0{,}01} = 0{,}865 \cdot x$$
$$\Rightarrow x = \frac{0{,}01}{0{,}865} = 0{,}011561$$

$$\mathbf{0{,}855} = 0{,}865 \cdot x$$
$$\Rightarrow x = \frac{0{,}855}{0{,}865} = 0{,}988439$$

Der schwierige Teil dabei ist, die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der zweiten Stufe zu berechnen. Diese erhält man, durch geeignete Division der bekannten Wahrscheinlichkeiten.

c) Erkläre beim Baumdiagramm aus Teil a), welche Bedeutung die Wahrscheinlichkeiten auf der 2. Stufe haben (z.B. der Wert 0,90) und welche Bedeutung die Wahrscheinlichkeiten ganz am Ende hinter den Pfaden haben (z.B. der Wert 0,09). Wo liegt der Unterschied zwischen diesen beiden Werten?

Im Baumdiagramm aus Teil a) stehen die Wahrscheinlichkeiten auf der 2. Stufe für die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Zum Beispiel bedeutet der Wert 0,90, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Test positiv ist, **unter der Bedingung**, dass die Person infiziert ist, bei 90 Prozent liegt.

Hingegen stehen die relativen Häufigkeiten am Ende eines Pfades für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person infiziert ist **und** dass ihr Test positiv ist. Hier ist die Frage also nicht dieselbe: Man schaut sich nicht mehr nur die infizierten Personen und ihre Tests an, sondern die gesamte Gruppe und fragt sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass irgendeine Person aus der Gruppe infiziert ist und gleichzeitig einen positiven Test erhält.

d) Beantworte die folgenden Fragen:

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass – wenn bekannt ist, dass ein Mensch nicht infiziert ist – der Test negativ ausfällt?
Diese Wahrscheinlichkeit ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{negativer Test} \mid \text{nicht infiziert}) = 0{,}95 = 95\%$$

(ii) Ein Mensch wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man einen Menschen hat, der infiziert ist und ein positives Testergebnis hat?
Bei dieser Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine *und*-Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{infiziert und positiver Test}) = 0{,}09 = 9\%$$

(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn bekannt ist, dass der Test positiv ausgefallen ist, dass der Mensch auch tatsächlich infiziert ist?

Hier handelt es sich wieder um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die vom umgekehrten Baumdiagramm aus dem Aufgabenteil b) abgelesen werden muss:

$$P(\text{infiziert} \mid \text{positiver Test}) = \frac{2}{3} = 66{,}66\%$$

(iv) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt?

$$P(\text{positiver Test}) = 0{,}135 = 13{,}5\%$$

zu Aufgabe 96: Eine Umfrage in einem Schwimmbad ergibt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher zufrieden ist, 60% beträgt. Leider antworten nicht alle Besucher: 70% der zufriedenen Besucher antworten auf den Fragebogen, bei den unzufriedenen sind es nur 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher zufrieden ist, wenn er auf den Fragebogen antwortet?

Diese Aufgabe kann man mit dem Satz von Bayes lösen. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

- $P(\text{Besucher zufrieden}) = 0{,}6$

  $\rightarrow$ $P(\text{Besucher nicht zufrieden}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P(\text{Antwort} \mid \text{Besucher zufrieden}) = 0{,}7$

  $\rightarrow$ $P(\text{keine Antwort} \mid \text{Besucher zufrieden}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- $P(\text{Antwort} \mid \text{Besucher nicht zufrieden}) = 0{,}05$

  $\rightarrow$ $P(\text{keine Antwort} \mid \text{Besucher nicht zufrieden}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$
- Gesucht: $P(\text{Besucher zufrieden} \mid \text{Antwort}) =?$

Wir benutzen den Satz von Bayes:

$$P(\text{Besucher zufrieden} \mid \text{Antwort}) = \frac{P(\text{Besucher zufrieden und Antwort})}{P(\text{Antwort})}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, die wir in die Formeln einsetzen sollen, müssen wir zunächst noch berechnen:

$$\begin{aligned} P(\text{Antwort}) &= P(\text{Antwort} \mid \text{Besucher zufrieden}) \cdot P(\text{Besucher zufrieden}) \\ &\quad + P(\text{Antwort} \mid \text{Besucher nicht zufrieden}) \cdot P(\text{Besucher nicht zufrieden}) \\ &= 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Besucher zufrieden und Antwort}) &= P(\text{Besucher}) \cdot P(\text{Antwort} \mid \text{Besucher zufrieden}) \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42 \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Werte in die Formel einsetzen:

$$\begin{aligned} P(\text{Besucher zufrieden} \mid \text{Antwort}) &= \frac{P(\text{Besucher zufrieden und Antwort})}{P(\text{Antwort})} \\ &= \frac{0{,}42}{0{,}44} \approx 0{,}9545 = 95{,}45\% \end{aligned}$$

C.5 zu Zufallsvariablen und Verteilungen

zu Aufgabe 97: Aus einer Urne mit drei grünen und vier blau Kugeln zieht Vanessa zweimal. Sie zieht mit Zurücklegen. X sei die Anzahl der gezogenen blauen Kugeln. Welche Werte kann X annehmen? Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Am besten macht ihr euch das ganze kurz an einem kleinen Baumdiagramm klar.
X kann die Werte 0,1 und 2 annehmen. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:

$$P(X=0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} \approx 0{,}1837 = 18{,}37\%$$

$$P(X=1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49} \approx 0{,}4898 = 48{,}98\%$$

$$P(X=2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49} \approx 0{,}3265 = 32{,}65\%$$

zu Aufgabe 98: Schraubo der Schraubenmeister stellt Schrauben her. Leider sind 20% seiner Schrauben defekt. Jemand entnimmt zufällig 5 Schrauben aus der Produktion. Schreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf, wenn die Zufallsgröße X die Anzahl der kaputten Teile beschreibt.

X kann die Werte $0, 1, 2, 3, 4$ und 5 annehmen. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:

$$P(X=0) = 0{,}8^5 \approx 0{,}3277 = 32{,}77\%$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}4096 = 40{,}96\%$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 \approx 0{,}2048 = 20{,}48\%$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0512 = 5{,}12\%$$

$$P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 \approx 0{,}0064 = 0{,}64\%$$

$$P(X=5) = 0{,}2^5 \approx 0{,}00032 = 0{,}032\%$$

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Art werden wir in Zukunft *Binomialverteilung* nennen.

zu Aufgabe 99: Handelt es sich bei den Spielen um ein faires Spiel? Wie müsste man den Einsatz ändern, damit es sich um ein faires Spiel handelt?

a) Mike wirft einen Würfel. Einsatz 4 €.
Bei ungerader Augenzahl bekommt Mike die entsprechende Zahl in Euro von der Bank, bei gerader Augenzahl muss er die entsprechende Zahl in Euro zusätzlich an die Bank abgeben.

Wichtig: Hier unbedingt angeben, was X sein soll!

Sei X nun also der Gewinn des Spiels in Euro. Wenn der Spieler beispielsweise eine 6 würfelt, dann muss er 6 € plus 4 € Einsatz zahlen, deshalb beginnt die Tabelle bei -10. So können wir uns auch alle weiteren Werte herleiten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist:

k	-10	-8	-6	-3	-1	1
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = (-10) \cdot \tfrac{1}{6} + (-8) \cdot \tfrac{1}{6} + (-6) \cdot \tfrac{1}{6} + (-3) \cdot \tfrac{1}{6} + (-1) \cdot \tfrac{1}{6} + 1 \cdot \tfrac{1}{6} = -4{,}5$$

Damit ist das vorliegende Spiel nicht fair. Würde man den Gewinneinsatz um 4,50 €, also auf $-0{,}50$ €, verringern, so wäre das Spiel fair. Man würde also 0,50 € bekommen, damit sich das Mitspielen lohnt.

b) Felix wirft zwei Würfel. Kein Einsatz.
Zeigen die Würfel unterschiedliche Augenzahlen, so erhält er die kleinere Augenzahl in Euro in bar. Bei gleicher Augenzahl muss er den doppelten Betrag der einen Augenzahl in Euro an die Bank bezahlen.

Wichtig: Hier unbedingt angeben, was X sein soll!

Sei X nun also der Gewinn des Spiels in Euro. Wenn zum Beispiel zwei Sechsen gewürfelt werden, dann muss der Spieler 12 € zahlen. Das ist dann auch der höchste mögliche Verlust. Der maximale Gewinn beträgt 5 €. Wir überlegen uns welche möglichen Kombinationen es gibt und wie häufig diese vorkommen. Anschließend tragen wir die Werte dann in die Tabelle ein. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist:

k	-12	-10	-8	-6	-4	-2	1	2	3	4	5
$P(\mathrm{X} = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$$\begin{aligned} E(X) = {} & (-12) \cdot \tfrac{1}{36} + (-10) \cdot \tfrac{1}{36} + (-8) \cdot \tfrac{1}{36} + (-6) \cdot \tfrac{1}{36} + (-4) \cdot \tfrac{1}{36} + (-2) \cdot \tfrac{1}{36} + 1 \cdot \tfrac{10}{36} \\ & + 2 \cdot \tfrac{8}{36} + 3 \cdot \tfrac{6}{36} + 4 \cdot \tfrac{4}{36} + 5 \cdot \tfrac{2}{36} = \tfrac{7}{9} \approx 0{,}78 \end{aligned}$$

Damit ist das vorliegende Spiel nicht fair. Würde man den Gewinneinsatz um 0,78 € erhöhen, so wäre das Spiel fair.

zu Aufgabe 100: Eine Fußballmannschaft möchte eine Tombola für die Vereinsmeisterschaft organisieren. Unter den 4000 Losen sind 3200 Nieten, 400 Lose mit 5 € Auszahlung, 300 Lose mit 10 € Auszahlung und 100 Lose mit 20 € Auszahlung. Der Lospreis beträgt 2 €.

Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn der Mannschaft pro Los.

a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Der größte Verlust für die Mannschaft betragt 18 €, da sie im schlimmsten Fall 20 € verlieren und gleichzeitig 2 € für das Los bekommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass so ein Los gezogen wird, beträgt $\frac{100}{4.000} = \frac{1}{40}$. Genau nach diesem Prinzip berechnen wir auch die Anderen Werte in der Tabelle.

k	-18	-8	-3	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

$$E(X) = (-18) \cdot \frac{1}{40} + (-8) \cdot \frac{3}{40} + (-3) \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{4}$$

Pro Los macht die Mannschaft also durchschnittlich 0,25 € Gewinn, d.h. 1.000 € Gewinn insgesamt (4.000 · 0,25 = 1.000).

$$\sigma(X) = \sqrt{\left(-18 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{40} + \left(-8 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{40} + \left(-3 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{5}} \approx 4{,}12$$

C.6 zu Bernoulli- und Binomialverteilung

zu Aufgabe 101: Ein Onlineversand wirbt damit, dass er 90% der Bestellungen am nächsten Tag zustellt. Chris bestellt zehn Weihnachtsgeschenke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind…

a) alle Geschenke am nächsten Tag zugestellt?

Sei X die Anzahl der am nächsten Tag zugestellten Geschenke: $X \sim B(10; 0{,}9; k)$.

$$\text{mit } n = 10 \text{ und } p = 0{,}9 \Rightarrow P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^0 \approx 34{,}87\%$$

Der Befehl für den Taschenrechner lautet: binomPdf(10, 0.9, 10)

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 34,87% sind alle 10 Geschenke am nächsten Tag zugestellt.

b) mindestens sechs Geschenke am nächsten Tag zugestellt?

Sei X die Anzahl der am nächsten Tag zugestellten Geschenke: $X \sim B(10; 0{,}9; k)$.

$$\begin{aligned}\text{mit } n = 10 \text{ und } p = 0{,}9 \Rightarrow P(X \geq 6) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)\\ &= \text{binomcdf}(10, 0.9, 6, 10) \approx 99{,}84\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 99,84% sind mindestens 6 Geschenke am nächsten Tag zugestellt.

zu Aufgabe 102: Bei Schokoladeneiern ist es so, dass in jedem sechsten Ei eine besondere Figur enthalten ist. Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man beim Kauf von…

a) 10 Eiern genau 10 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(10; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0{,}000000016538$$

Der Befehl für den Taschenrechner lautet: binompdf(10, $\frac{1}{6}$, 10)

b) 10 Eiern genau 2 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(10; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 29{,}07\%$$

Der Befehl für den Taschenrechner lautet: binompdf(10, $\frac{1}{6}$, 2)

c) 4 Eiern genau 2 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(4; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 11{,}57\%$$

Der Befehl für den Taschenrechner lautet: binompdf(4, $\frac{1}{6}$, 2)

d) 20 Eiern höchstens 2 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(20; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \text{binomCdf}(20, \frac{1}{6}, 2) \approx 32{,}87\%$$

e) 8 Eiern 4 bis 6 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(8; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \text{binomCdf}(8, \frac{1}{6}, 4, 6) \approx 3{,}06\%$$

f) 8 Eiern mindestens 4 solcher Figuren erhält.

Sei X die Anzahl der Eier mit besonderen Figuren: $X \sim B\left(8; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &= \text{binomCdf}(8, \frac{1}{6}, 4, 8) \approx 3{,}07\% \end{aligned}$$

zu Aufgabe 103: Verwende für diese Aufgabe deinen **Taschenrechner!**
Auf der Strecke Münster – Malle fliegt ein Flugzeug mit 200 Plätzen. Die Belegungsstatistik zeigt, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab **stets ausgebucht** sind. Allerdings werden dann durchschnittlich 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert. Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die den Flug tatsächlich antreten.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim nächsten Flug. . .

(i) genau 172 Plätze tatsächlich genutzt werden.

Sei X die Anzahl der tatsächlich genutzten Plätze: $X \sim B(200; 0{,}9; k)$.

$$P(X = 172) = \binom{200}{172} \cdot 0{,}9^{172} \cdot 0{,}1^{28} \approx 1{,}63\%$$

Der Befehl für den Taschenrechner lautet: binomPdf(200, 0.9, 172)

(ii) höchstens 184 Plätze tatsächlich genutzt werden.

Sei X die Anzahl der tatsächlich genutzten Plätze: $X \sim B(200; 0{,}9; k)$.

$$P(X \leq 184) = \text{binomCdf}(200, 0.9, 184) \approx 85{,}69\%$$

(a) Zwischen 172 und 188 Plätze tatsächlich genutzt werden.

Sei X die Anzahl der tatsächlich genutzten Plätze: $X \sim B(200; 0{,}9; k)$.

$$P(172 \leq X \leq 188) = \text{binomCdf}(200, 0.9, 172, 188) \approx 95{,}61\%$$

b) Eine Person, die tatsächlich fliegt, bringt der Fluggesellschaft 100 € ein. Trotz der Kosten in Höhe von 500 € für jeden wegen Überbuchung abgewiesenen Fluggast verkauft die Fluggesellschaft regelmäßig 216 Plätze statt der vorhandenen 200. Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Überbuchung.

Sei X die Anzahl tatsächlich genutzten Plätze: $X \sim B(216; 0{,}9; k)$.

$$P(X \geq 201) = \text{binomCdf}(216, 0.9, 201, 216) \approx 7{,}82\%$$

zu Aufgabe 104: Verwende für diese Aufgabe deinen **Taschenrechner!**
Eine Münze wird 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man...

a) mindestens 46-mal, aber höchstens 54-mal Kopf?

Sei X die Anzahl der Köpfe: $X \sim B\left(100; \frac{1}{2}; k\right)$.

$$P(46 \leq X \leq 54) = \text{binomCdf}(100, 0.5, 46, 54) \approx 63{,}18\%$$

b) mindestens 30-mal, aber höchstens 70-mal Kopf?

Sei X die Anzahl der Köpfe: $X \sim B\left(100; \frac{1}{2}; k\right)$.

$$P(30 \leq X \leq 70) = \text{binomCdf}(100, 0.5, 30, 70) \approx 99{,}99\%$$

c) weniger als 45-mal Kopf?

Sei X die Anzahl der Köpfe: $X \sim B\left(100; \frac{1}{2}; k\right)$.

$$P(X \leq 44) = \text{binomCdf}(100, 0.5, 0, 44) \approx 13{,}56\%$$

d) mehr als 49-mal Kopf?

Sei X die Anzahl der Köpfe: $X \sim B\left(100; \frac{1}{2}; k\right)$.

$$P(X \geq 50) = \text{binomCdf}(100, 0.5, 50, 100) \approx 53{,}98\%$$

zu Aufgabe 105: Beantworte die Fragen.

a) Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für eine Vier sein, damit der Spieler mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Vier wirft?

X sei die Anzahl der Vieren in den Würfen: $X \sim B(10; x; k)$.
x sei die Wahrscheinlichkeit für eine Vier.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Vier muss also mindestens 36,9% betragen, damit man mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Vier wirft.

$$\begin{array}{rrcl}
 & P(X \geq 1) & \geq & 0{,}99 \\
\Leftrightarrow & 1 - P(X = 0) & \geq & 0{,}99 \\
\Leftrightarrow & 1 - \binom{10}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^{10} & \geq & 0{,}99 \\
\Leftrightarrow & (1-x)^{10} & \leq & 0{,}01 \\
\Leftrightarrow & 1 - x & \leq & \sqrt[10]{0{,}01} \\
\Leftrightarrow & -x & \leq & \sqrt[10]{0{,}01} - 1 \\
\Leftrightarrow & x & \geq & -\sqrt[10]{0{,}01} + 1 \\
\Leftrightarrow & x & \geq & 0{,}3690
\end{array}$$

b) Wie oft muss man einen normalen Würfel hintereinander werfen, damit man mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Vier wirft?

X sei die Anzahl der Vieren in den Würfen: $X \sim B\left(n; \frac{1}{6}; k\right)$.
n sei die Anzahl der Würfe.

$$
\begin{aligned}
& & P(X \geq 1) &\geq 0,99 \\
&\Leftrightarrow & 1 - P(X = 0) &\geq 0,99 \\
&\Leftrightarrow & 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^n &\geq 0,99 \\
&\Leftrightarrow & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n &\geq 0,99 \qquad \text{weil } \binom{n}{0} = 1 \\
&\Leftrightarrow & \left(\frac{5}{6}\right)^n &\leq 0,01 \\
&\Leftrightarrow & n &\geq \log_{\frac{5}{6}}(0,01) \quad * \\
&\Leftrightarrow & n &\geq 25,26
\end{aligned}
$$

* Das Ungleichheitszeichen dreht sich um, wenn die Basis des Logarithmus kleiner 1 ist.
Man muss also mindestens 26-mal würfeln.

C.7 zu Hypergeometrische Verteilung

zu Aufgabe 106: Ein Mathelehrer möchte die Hausaufgaben mit seiner 33-köpfigen Klasse besprechen. Da sich keiner meldet, droht er sechs Leute zufällig nacheinander auszulosen, die dann ihre Hausaufgaben vorstellen müssen. Die Klasse besteht aus 18 Mädchen und 15 Jungen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass...

a) nur Jungs die Hausaufgaben vorstellen müssen?

X gibt die Anzahl der Jungs an, die die Hausaufgabe vorstellen müssen: $X \sim H(6, 33, 15)$ (M ist in unserem Fall die Anzahl der Jungs)

$$P(X = 6) = \frac{\binom{15}{6} \cdot \binom{18}{0}}{\binom{33}{6}} \approx 0{,}0045$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,45%.

b) gleich viele Jungs und Mädchen ihre Hausaufgaben vorstellen müssen?

$$P(X = 3) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{33}{6}} \approx 0{,}3352$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 33,52%.

c) Du deine Hausaufgaben vorstellen musst? (Wenn du Teil dieser Klasse wärst)

In diesem Fall: X gibt an, ob/wie oft du deine Hausaufgabe vorstellen muss. Dabei ist 0 = Nein und 1 = Ja. Es gilt: $X \sim H(6, 33, 1)$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{32}{5}}{\binom{33}{6}} \approx 0{,}1818$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 18,18%, was sinnvollerweise $\frac{6}{33}$ entspricht.

zu Aufgabe 107: Bei einer europäischen Lotterie wird nach dem Prinzip „5 aus 50″ gespielt. Aus 50 nummerierten Kugeln werden also fünf Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, wobei die Reihenfolge der Kugeln keine Rolle spielt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür...

a) fünf Richtige zu haben?

X gibt die Anzahl der richtigen Zahlen an: $X \sim H(5, 50, 5)$.

$$P(X = 5) = \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{45}{0}}{\binom{50}{5}} = \frac{1}{2.118.760} \approx 0{,}000000472$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,0000472%.

b) drei Richtige zu haben?

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}004673$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,4673%.

c) mindestens eine Richtige zu haben?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}4234$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 42,34%.

d) Wie viele Richtige kann man erwarten?

$$\mu = n \cdot \frac{M}{N} = 5 \cdot \frac{5}{50} = \frac{1}{2}$$

Man kann also im Schnitt eine halbe Richtige erwarten.

zu Aufgabe 108: Ein Hersteller von Displayschutzfolien hat einen großen Auftrag erhalten. Er soll 5.000 Schutzfolien an einen Großkunden liefern. Von diesen 5.000 Folien sind 5% defekt. Bei der Auslieferung möchte der Kunde eine Stichprobe von 30 Folien entnehmen. Wie wahrscheinlich ist es, dass von den 30 Folien…

a) keine defekt ist?

X gibt die Anzahl der defekten Schutzfolien (in der Stichprobe) an: $X \sim H(30, 5.000, 250)$ (Wir nehmen 30 Folien als Stichprobe, 5.000 haben wir insgesamt und 5% von 5.000, also 250 sind defekt.)

$$P(X = 0) = \frac{\begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.750 \\ 30 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5.000 \\ 30 \end{pmatrix}} \approx 0{,}2137$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 21,37%.

b) fünf defekt sind?

$$P(X = 5) = \frac{\begin{pmatrix} 250 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.750 \\ 25 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5.000 \\ 30 \end{pmatrix}} \approx 0{,}0122$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 1,22%.

Er möchte die Lieferung nur annehmen, wenn weniger als 3 Folien defekt sind.

c) Wie viele defekte Folien muss der Kunde erwarten?

$$\mu = n \cdot \frac{M}{N} = 30 \cdot \frac{250}{5.000} = 1{,}5$$

Er muss also 1,5 defekte Folien erwarten.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bedingung des Kunden erfüllt wird?

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.750 \\ 30 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5.000 \\ 30 \end{pmatrix}} + \frac{\begin{pmatrix} 250 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.750 \\ 29 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5.000 \\ 30 \end{pmatrix}} + \frac{\begin{pmatrix} 250 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.750 \\ 28 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5.000 \\ 30 \end{pmatrix}} \\ &\approx 0{,}8126 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 81,26%.

C.8 zu Spezielle stetige Verteilungen (Normalverteilung)

zu Aufgabe 109: Wir nehmen an, dass die Größe von Menschen normalverteilt mit den Werten μ = 1,76m und σ = 0,09m ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mensch...

a) zwischen 1,70m und 1,80 groß ist.

$$P(1{,}70 < X < 1{,}80) = \text{normCdf}(1.70, 1.80, 1.76, 0.09) \approx 0{,}4191$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ca. 41,91%.

b) zwischen 1,50m und 1,65m groß ist.

$$P(1{,}50 < X < 1{,}65) = \text{normCdf}(1.50, 1.65, 1.76, 0.09) \approx 0{,}1089$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ca. 10,89%.

c) 1,93m oder größer ist.

$$P(X \geq 1{,}93) = \text{normCdf}(1.93, 2.30, 1.76, 0.09) \approx 0{,}0295$$

Als obere Grenze müsste man bei einer Normalverteilung eigentlich ∞ nehmen, da das aber im Sachzusammenhang keinen Sinn macht, nehmen wir 2,30m. Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ca. 2,95%.

d) kleiner als 1,83 m ist.

$$P(X < 1{,}83) = \text{normCdf}(0, 1.83, 1.76, 0.09) \approx 0{,}7817$$

Als untere Grenze müsste man bei einer Normalverteilung eigentlich $-\infty$ nehmen, da das aber im Sachzusammenhang keinen Sinn macht, nehmen wir 0m. Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ca. 78,17%.

e) 1,83m oder kleiner ist.

$$P(X \leq 1{,}83) = \text{normCdf}(0, 1.83, 1.76, 0.09) \approx 0{,}7817$$

Als untere Grenze müsste man bei einer Normalverteilung eigentlich $-\infty$ nehmen, da das aber im Sachzusammenhang keinen Sinn macht, nehmen wir 0m. Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ca. 78,17%.

Da die Wahrscheinlichkeit für $P(X = 1{,}83) = 0$ gilt, macht es bei Normalverteilungen keinen Unterschied, ob man sich die Wahrscheinlichkeit für $P(X < 1{,}83)$ oder $P(X \leq 1{,}83)$ anschaut.

f) 2,00 m groß ist.

$$P(X = 2{,}00) = 0$$

Bei stetigen Verteilungen sind Wahrscheinlichkeiten für einen bestimmten Wert immer.

Jetzt beantworten wir noch die folgenden Fragestellungen.

g) Berechne die Körpergröße für die gilt, dass 80% aller Menschen kleiner als sie sind.

$$\text{InvNorm}(0.8, 1.76, 0.09) \approx 1{,}836$$

Bei einer Körpergröße von ca. 1,836m beträgt die Wahrscheinlichkeit kleiner als sie zu sein 80%.

h) Berechne, wie groß man mindestens sein muss, um größer als 95% der anderen Menschen zu sein.

Wir berechnen, wie groß man sein muss, damit 95% kleiner sind als man selbst und finden dadurch den Wert, bei dem man größer als 95% der anderen Menschen ist:

$$\text{InvNorm}(0.95, 1.76, 0.09) \approx 1{,}908$$

Man muss also etwas größer als 1,90m sein, damit man größer als 95% der anderen Menschen ist.

i) Wie groß müsste der Erwartungswert der Verteilung sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass jemand größer als 1,95m ist, mindestens 5% beträgt.

Hier muss herausgefunden werden, was μ sein muss, damit die folgende Gleichung aufgeht:

$$\text{normCdf}(1.95, 2.30, x, 0.09) = 0{,}05$$

Man nutzt den Taschenrechner, zum Beispiel mit dem Befehl

$$\text{nSolve}(\text{normCdf}(1.95, 2.30, x, 0.09) = 0.05, x) \approx 1,802$$

Der Erwartungswert müsste also bei mindestens 1,802m liegen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, größer oder gleich 1,90m groß zu sein, mindestens 5% beträgt.

zu Aufgabe 110: Ein Luxus-Pralinenhersteller verkauft eine kleine Pralinenbox, die 50g Pralinen enthält. Da der Hersteller höchste Ansprüche an die Genauigkeit der Angaben stellt, überlegt er eine neue Maschine zu bestellen, die die Pralinen abwiegt und verpackt. Mit der Maschine ist das Gewicht der Pralinenboxen normalverteilt mit dem Erwartungswert 50g und der Standardabweichung 1g.

Der Hersteller möchte, dass nur wenige Boxen weniger als 49,5g wiegen und nur wenige mehr als 52g, da seine Materialkosten sonst zu hoch werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht der Box unter 49,5g und über 52g liegt? Würdest du dem Hersteller zum Kauf der Maschine raten?

X = Gewicht der Box in Gramm. Dann berechnen wir:

$$P(49{,}5 > X > 52) = 1 - P(49{,}5 \leq X \leq 52) = 1 - \text{NormCdf}(49.5, 52, 50, 1) \approx 0{,}3313$$

Damit liegt die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei 33,13%. Da die Wahrscheinlichkeit recht hoch ist und der Hersteller möchte, dass nur wenige Boxen mehr oder weniger als die genannten Werte wiegen, sollte man ihm vom Kauf abraten.

C.9 zu Sigma-Regeln

zu Aufgabe 111: Gib eine Schätzung ab, wie oft man eine 1 bei einem 500-fachen Würfelwurf würfeln wird. Schätze außerdem ein Intervall, in dem man zu ca. 90% landen wird.

X beschreibt die Anzahl der geworfenen Einsen: $X \sim B\left(500; \frac{1}{6}; k\right)$.

1. Punktschätzung:

$$\mu = n \cdot p = 500 \cdot \frac{1}{6} \approx 83{,}33$$

   Also kann man ca. 83 Mal eine Eins erwarten.

2. Intervallschätzung:

$$\sigma = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 8{,}33 > 3$$

   Die Sigma-Regeln sind also anwendbar.

   $\rightarrow$ Intervallgrenzen:

$$g_1 = \mu - 1{,}64\sigma \approx 83{,}33 - 1{,}64 \cdot 8{,}33 \approx 69{,}67$$
$$g_2 = \mu + 1{,}64\sigma \approx 83{,}33 + 1{,}64 \cdot 8{,}33 \approx 96{,}99$$

   Wir runden nach außen und erhalten als gesuchtes Intervall: $[69, 97]$. Also liegt die Anzahl der Einsen beim 500-fachen Würfelwurf zu ca. 90% zwischen 69 und 97.

zu Aufgabe 112: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine deutsche Person schon einmal etwas von MatheMind gehört hat, liegt bei 50%. Nun werden 90 zufällige Leute gefragt, ob sie MatheMind kennen.

70% von ihnen geben an, dass sie schon einmal etwas von MatheMind gehört haben.

Berechne ein Intervall, in dem die Anzahl der Menschen, die MatheMind kennen, zu ca. 95% liegen müsste. Ist es wahrscheinlich, dass 70% der 90 Leute MatheMind kennen?

X gibt die Anzahl der Menschen an, die MatheMind kennen: $\mathrm{X} \sim B\left(90, \frac{1}{2}, k\right)$.

$$\mu = n \cdot p = 90 \cdot 0{,}5 = 45$$
$$\sigma = \sqrt{90 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \approx 4{,}74 > 3$$

Damit sind die Sigma-Regeln anwendbar. Intervallgrenzen für das 95%-Intervall:

$$g_1 = \mu - 1{,}96\sigma \approx 45 - 1{,}96 \cdot 4{,}74 \approx 35{,}71$$
$$g_2 = \mu + 1{,}96\sigma \approx 45 + 1{,}96 \cdot 4{,}74 \approx 54{,}29$$

Wir runden nach außen und erhalten als 95%-Intervall $[35, 55]$. Zu ca. 95% kennen also zwischen 35 und 55 der 90 Leute MatheMind.

Wenn 70% von 90 MatheMind kennen, dann sind das $90 \cdot 0{,}7 = 63$ Menschen. Dieser Wert liegt nicht im 95%-Intervall und ist damit ziemlich unwahrscheinlich.

zu Aufgabe 113: Bei der Wahl zum Vorsitzenden eines großen Vereines erhielt der Gewinner laut Endergebnis 60,8% der Stimmen.

Um den ungefähren Ausgang der Wahl schon vorher einzuschätzen, hat eine Gruppe 250 Wähler direkt nach ihrer Stimmabgabe gefragt, welchen Kandidaten sie gewählt haben.

Sei X die Anzahl der Wähler, die den Gewinner gewählt haben: $X \sim B(250; 0,608; k)$.

a) Gib eine Punktschätzung für die Anzahl der Wähler in der Stichprobe ab, die den letztendlichen Gewinner gewählt haben.

$$\mu = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}608 = 152$$

Zu erwarten sind also 152 Wähler, die den letztendlichen Gewinner gewählt haben.

b) Gib an, in welchem Intervall die Anzahl der Wähler, die den Gewinner gewählt haben, zu ca. 95% liegen wird.

$$\sigma = \sqrt{250 \cdot 0{,}608 \cdot 0{,}392} \approx 7{,}72 > 3$$

Damit sind die Sigma-Regeln anwendbar. Intervallgrenzen zum 95%-Intervall:

$$g_1 = \mu - 1{,}96\sigma \approx 152 - 1{,}96 \cdot 7{,}72 \approx 136{,}87$$
$$g_2 = \mu + 1{,}96\sigma \approx 152 + 1{,}96 \cdot 7{,}72 \approx 167{,}13$$

Wir runden nach außen und erhalten als Intervall: $[136, 168]$.

c) Gib mit den Ergebnissen aus a) und b) eine Punkt- und Intervallschätzung dafür ab, wie groß der prozentuale Anteil der Wähler in der Stichprobe sein wird, die den Gewinner gewählt haben.

Dazu berechnet man einfach

1. für die Punktschätzung: $\frac{152}{250} \approx 60{,}8\%$
2. für die Intervallschätzung: $\frac{136}{250} \approx 54{,}4\%$ und $\frac{168}{250} \approx 67{,}2\%$.
   Als Intervallschätzung für den prozentualen Anteil ergibt sich also: $[54{,}4\%; 67{,}2\%]$.

C.10 zu Hypothesentest

zu Aufgabe 114: Lena möchte überprüfen, ob ein Würfel gezinkt ist. Sie wirft den Würfel 480-mal und notiert die Anzahl der Sechsen. Löse die Aufgabe mit den Sigma-Regeln.

a) Finde eine Entscheidungsregel heraus und fertige eine passende Zeichnung vom Annahme- und Ablehnungsbereich an. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll bei $\alpha = 10\%$ liegen.

X sei Anzahl der Sechsen. X ist binomialverteilt mit $X \sim B\left(480; \frac{1}{6}; k\right)$.

$$\mu = 480 \cdot \frac{1}{6} = 80 \quad \sigma = \sqrt{480 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 8{,}16 > 3 \checkmark$$

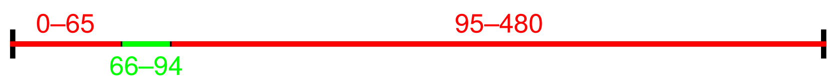
Damit sind die σ-Regeln anwendbar und wir berechnen die Grenzen.

1. Null- und Alternativhypothese aufstellen

$$H_0 : p = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad H_1 : p \neq \frac{1}{6}$$

2. Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen
   Annahmebereich bestimmen, in dem man zu mindestens 90% landet, wenn $p = \frac{1}{6}$ ist:
   - Untere Grenze: $g_1 = \mu - 1{,}64\sigma \approx 80 - 1{,}64 \cdot 8{,}16 \approx 66{,}62$
   - Obere Grenze: $g_2 = \mu + 1{,}64\sigma \approx 80 + 1{,}64 \cdot 8{,}16 \approx 93{,}38$

   Nach außen runden liefert uns:
   - Annahmebereich: $[66, 94]$
   - Ablehnungsbereich: $[0, 65]$ und $[95, 480]$



b) Wie wird sich Lena entscheiden, wenn 103-mal die 6 kommt?

Der Wert 103 liegt im Ablehnungsbereich. Deshalb wird die Nullhypothese verworfen und davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 6 nicht bei $\frac{1}{6}$ liegt.

c) Beurteile das Ergebnis 90-mal Augenzahl 6. Kann man mit diesem Ergebnis sicher davon ausgehen, dass der Würfel fair ist?

Da der Wert 90 im Annahmebereich liegt, wird die Nullhypothese angenommen und davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 6 tatsächlich bei $\frac{1}{6}$ liegt.

Sicher kann man nicht davon ausgehen. Es könnte nämlich sein, dass die Wahrscheinlichkeit für eine 6 in Wirklichkeit bei $\frac{1}{5}$ liegt, die Anzahl der gewürfelten Sechsen aber trotzdem im Annahmebereich landet.

zu Aufgabe 115: In einem Buchladen waren im November insgesamt 5.000 Kunden, von denen 2.800 etwas gekauft haben. In den ersten 5 Verkaufstagen des folgenden Dezembers waren 900 Kunden im Buchladen. Löse die Aufgabe genau, also ohne die Sigma-Regeln.

a) Bei welcher Menge von zahlenden Kunden kann man davon ausgehen, dass im Dezember ein größerer Anteil der Kunden etwas kauft? ($\alpha = 5\%$).

X sei Anzahl zahlender Kunden. X ist binomialverteilt mit $X \sim B\left(900; \frac{2.800}{5.000}; k\right)$.

1. Null- und Alternativhypothese aufstellen

$$H_0 : p \leq \frac{2.800}{5.000} \quad \text{und} \quad H_1 : p > \frac{2.800}{5.000}$$

   Wir wollen ja herausfinden, ob sich die Menge zahlender Kunden erhöht hat.

2. Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen
   Wir wollen den Bereich finden, in dem man zu höchstens 5% landet, wenn man davon ausgeht, dass die Wahrscheinlichkeit für einen zahlenden Kunden bei $\frac{2.800}{5.000} = 56\%$ oder weniger liegt (Ablehnungsbereich):

   $\text{binomCdf}\left(900, \frac{2.800}{5.000}, 528, 900\right) \approx 0{,}057 \quad > 5\% \rightarrow$ Nicht der richtige Bereich

   $\text{binomCdf}\left(900, \frac{2.800}{5.000}, 529, 900\right) \approx 0{,}0497 \quad < 5\% \rightarrow$ Der richtige Bereich.

Daraus folgt:

- Ablehnungsbereich: $[529, 900]$
- Annahmebereich: $[0, 528]$

Liegt die Kundenzahl im Annahmebereich, kann man nicht davon ausgehen, dass sich der Anteil zahlender Kunden erhöht hat. Liegt sie im Ablehnungsbereich, kann man sehr sicher davon ausgehen, dass die Anzahl zahlender Kunden sich erhöht hat.

b) Beurteile, ob die Untersuchung mit den gegebenen Zahlen und Zeiträumen sinnvoll ist.

Es ist natürlich sehr schwierig ohne weitere Informationen zu beurteilen, ob Zahlen und Zeiträume sinnvoll sind. In der Realität könnte es aber sein, dass durch das Weihnachtsgeschäft im Dezember in jedem Jahr der Anteil zahlender Kunden steigt. Sinnvoller wäre dann ein Vergleich mit den Zahlen vom Dezember aus dem Jahr zuvor, denn so könnte man saisonale Schwankungen berücksichtigen.

c) Gehe davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen zahlenden Kunden in Wirklichkeit bei 60% liegt. Berechne und interpretiere den Fehler 1. und 2. Art.

- **Fehler 1. Art:**
  Wahrscheinlichkeit berechnen im Ablehnungsbereich zu landen, wenn H_0 stimmt:

$$P(529 \leq X \leq 900) = \text{binomCdf}\left(900, \frac{2.800}{5.000}, 529, 900\right) \approx 0{,}0497$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art liegt also bei ca. 4,97%.

  Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man davon ausgeht, dass mehr Kunden zahlen, obwohl in Wirklichkeit nicht mehr Kunden zahlen, bei ca. 4,97% liegt.

- **Fehler 2. Art:**
  Wahrscheinlichkeit berechnen im Annahmebereich zu landen, wenn p in der Realität 60% beträgt:

$$P_{0,6}(X \leq 528) = \text{binomCdf}(900, 0.6, 528) \approx 0{,}217$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art liegt also bei ca. 21,7%.

  Dass bedeutet, dass man, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen zahlenden Kunden in der Realität bei 60% liegt, zu ca. 21,7% im Annahmebereich landet und damit davon ausgeht, dass nicht mehr Kunden etwas kaufen, obwohl eigentlich mehr Kunden etwas kaufen.

zu Aufgabe 116: MatheMind behauptet, dass mehr als die Hälfte aller Schüler, die ein Lernheft kaufen, das von MatheMind nehmen.

a) Skeptische Beobachter trauen der Aussage nicht und möchten einen Hypothesentest zum Signifikanzniveau von 5% durchführen. Dazu befragen sie eine Klasse mit 35 Schülern, die alle ein Lernheft gekauft haben. Berechne den Annahme- und Ablehnungsbereich.

X sei Anzahl der Schüler, die ein Heft von MatheMind gekauft haben. X ist binomialverteilt mit $X \sim B(35; 0{,}5; k)$.

1. Null- und Alternativhypothese aufstellen

$$H_0 : p \geq 0{,}5$$
$$H_1 : p < 0{,}5$$

Die Skeptiker wollen ja zeigen, dass weniger als die Hälfte ein Heft von MatheMind kauft.

2. Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen
Wir wollen den Bereich finden, in dem man zu höchstens 5% landet, wenn man davon ausgeht, dass mindestens 50% der Schüler, die ein Lernheft kaufen, das von MatheMind nehmen (Ablehnungsbereich). Da

$$\sigma = \sqrt{35 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 2{,}958 < 3$$

ist, sind die Sigma-Regeln nicht anwendbar.

$\text{binomCdf}\,(35, 0.5, 13) \approx 0{,}088 \quad > 5\% \to$ Nicht der richtige Bereich

$\text{binomCdf}\,(35, 0.5, 12) \approx 0{,}045 \quad < 5\% \to$ Der richtige Bereich.

Daraus folgt:

- Ablehnungsbereich: $[0, 12]$
- Annahmebereich: $[13, 35]$

Wenn 12 oder weniger Schüler ein Lernheft von MatheMind haben, dann wird die Nullhypothese verworfen und davon ausgegangen, dass die Aussage von MatheMind nicht stimmt. Wenn 13 oder mehr Schüler ein Lernheft von MatheMind haben, kann nicht sicher davon ausgegangen werden, dass die Aussage von MatheMind nicht stimmt. Sie wird dann als wahr angesehen.

b) MatheMind hört von den Skeptikern und will ihnen die Richtigkeit der Aussage beweisen. Dazu möchten auch sie einen Hypothesentest mit den 35 Schülern und einem Signifikanzniveau von 5% durchführen. Berechne, wie der Annahme- und Ablehnungsbereich hier lautet.

X sei Anzahl der Schüler, die ein Heft von MatheMind gekauft haben. X ist binomialverteilt mit $X \sim B(35; 0{,}5; k)$.

1. Null- und Alternativhypothese aufstellen

$$H_0 : p \leq 0{,}5 \quad \text{und} \quad H_1 : p > 0{,}5$$

MatheMind will ja zeigen, dass mehr als die Hälfte ein Heft von ihnen kauft.

2. Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen
Wir wollen den Bereich finden, in dem man zu höchstens 5% landet, wenn man davon ausgeht, dass höchstens 50% der Schüler, die ein Lernheft kaufen, das von MatheMind nehmen (Ablehnungsbereich). Da

$$\sigma = \sqrt{35 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 2{,}958 < 3$$

ist, sind die Sigma-Regeln nicht anwendbar.

$\text{binomCdf}\,(35, 0.5, 22, 35) \approx 0{,}088 \quad > 5\% \to$ Nicht der richtige Bereich

$\text{binomCdf}\,(35, 0.5, 23, 35) \approx 0{,}045 \quad < 5\% \to$ Der richtige Bereich.

Daraus folgt:

- Ablehnungsbereich: $[23, 35]$
- Annahmebereich: $[0, 22]$

Wenn 23 oder mehr Schüler ein Lernheft von MatheMind haben, dann wird die Nullhypothese verworfen und davon ausgegangen, dass die Aussage von MatheMind stimmt. Wenn 22 oder weniger Schüler ein Lernheft von MatheMind haben, kann nicht sicher davon ausgegangen werden, dass die Aussage von MatheMind stimmt. Sie wird dann als falsch angesehen.

c) 18 von den 35 Schülern haben ein Lernheft von MatheMind. Betrachte, wie beide Hypothesentests mit diesem Wert ausfallen würden. Was ist daran problematisch?

Wenn 18 Schüler ein Lernheft von MatheMind haben, dann landen wir bei beiden Hypothesentests im Annahmebereich. Beide Seiten können also ihre Aussage nicht nachweisen.

Das ist deshalb problematisch, weil zum einen die jeweilige Seite bei der Betrachtung ihres eigenen Tests davon ausgeht, dass die jeweils andere Seite Recht hat. Zum anderen ist es problematisch, weil man auf der Grundlage beider Tests zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis über die Lage in der Realität kommt.

d) Berechne für a) den Fehler 1. und 2. Art, wenn in Wirklichkeit nur 40% der Käufer von Lernheften das von MatheMind kaufen. Interpretiere die Ergebnisse im Kontext.

- **Fehler 1. Art:**
  Wahrscheinlichkeit berechnen im Ablehnungsbereich zu landen, wenn H_0 stimmt:

  $$P(X \leq 12) = \text{binomCdf}(35, 0.5, 12) \approx 0{,}045$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art liegt also bei ca. 4,5%.
  Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man davon ausgeht, dass die Aussage von MatheMind falsch ist, obwohl sie in Wirklichkeit richtig ist, bei ca. 4,5% liegt.

- **Fehler 2. Art:**
  Wahrscheinlichkeit berechnen im Annahmebereich zu landen, wenn p in der Realität 40% beträgt:

  $$P_{0,4}(13 \leq X \leq 35) = \text{binomCdf}(35, 0.4, 13, 35) \approx 0{,}694$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art liegt also bei ca. 69,4%.
  Dass bedeutet, dass es zu ca. 69,4% passieren kann, dass man davon ausgeht, dass die Aussage von MatheMind stimmt, obwohl sie eigentlich falsch ist, wenn in der Realität nur 40% der Käufer ein Buch von MatheMind haben.

zu Aufgabe 117: Ein Hersteller von Cremes möchte testen, ob weniger als 20% seiner Cremedosen minderbefüllt sind. Löse die Aufgabe mit den Sigma-Regeln.

a) Es wird eine Stichprobe von 80 Cremedosen entnommen. Berechne den Annahme- und Ablehnungsbereich zu einem Signifikanzniveau von 5%.

X ist binomialverteilt: $X \sim B(80; 0{,}2; k)$.

1. Null- und Alternativhypothese aufstellen

$$H_0 : p \geq 0{,}2 \quad \text{und} \quad H_1 : p < 0{,}2$$

   Man will ja zeigen, dass weniger als 20% minderbefüllt sind.

2. Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen
   Wir wollen den Bereich finden, in dem man zu höchstens 5% landet, wenn man davon ausgeht, dass mindestens 20% der Dosen minderbefüllt sind (Ablehnungsbereich):

$$\mu = 80 \cdot 0{,}2 = 16 \text{ und } \sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 3{,}5777 > 3 \checkmark$$

   Die σ-Regeln sind also anwendbar. Wir berechnen den 90%-Bereich um den Erwartungswert. Dadurch ergeben sich links und rechts 5%-Bereiche, von denen wir den Bereich links suchen. Die Grenze für den linken Bereich lautet:

$$\text{Untere Grenze:} \quad g = \mu - 1{,}64 \cdot \sigma \approx 16 - 1{,}64 \cdot 3{,}5777 \approx 10{,}1326$$

   Nach außen runden liefert den Ablehnungsbereich:

   - Ablehnungsbereich: $[0, 10]$
   - Annahmebereich: $[11, 80]$

b) Berechne den neuen Annahme- und Ablehnungsbereich, wenn man das Signifikanzniveau, auf 2,5% reduziert. (Also die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art auf 2,5% beschränkt).

Da die Irrtumswahrscheinlichkeit α = 2,5% betragen soll, berechnen wir den 95%-Bereich um den Erwartungswert. Dadurch ergeben sich links und rechts 2,5%-Bereiche, von denen wir den Bereich links suchen. Die Grenze für den linken Bereich lautet:

$$\text{Untere Grenze:} \quad g = \mu - 1{,}96 \cdot \sigma \approx 16 - 1{,}96 \cdot 3{,}5777 \approx 8{,}9877$$

Nach außen runden liefert den Ablehnungsbereich:

- Ablehnungsbereich: $[0, 8]$
- Annahmebereich: $[9, 80]$

c) Berechne für a) und b) wie groß die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist, wenn in Wirklichkeit nur 15% der Dosen minderbefüllt sind.

- Für a):
  Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit im Annahmebereich zu landen, wenn in Wirklichkeit nur 15% der Dosen minderbefüllt sind:

$$P_{0,15}(11 \leq X \leq 80) = \text{binomCdf}(80, 0.15, 11, 80) \approx 0{,}67$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beläuft sich also auf rund 67%.

- Für b):
  Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit im Annahmebereich zu landen, wenn in Wirklichkeit nur 15% der Dosen minderbefüllt sind:

$$P_{0,15}(9 \leq X \leq 80) = \text{binomCdf}(80, 0.15, 9, 80) \approx 0{,}8658$$

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beläuft sich also auf rund 86,58%.

d) Der Stichprobenumfang wird auf 200 Cremedosen erhöht. Wie wirkt sich das auf den Fehler 2. Art aus? (α = 0,05)

$X \sim B(200; 0{,}2; k)$

Annahme- & Ablehnungsbereich bestimmen

Wir wollen den Bereich finden, in dem man zu höchstens 5% landet, wenn man davon ausgeht, dass mindestens 20% der Dosen minderbefüllt sind (Ablehnungsbereich):

$$\mu = 200 \cdot 0{,}2 = 40 \text{ und } \sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 5{,}6569 > 3 \checkmark$$

Die σ-Regeln sind also anwendbar. Wir berechnen den 90%-Bereich um den Erwartungswert. Dadurch ergeben sich links und rechts 5%-Bereiche, von denen wir den Bereich links suchen. Die Grenze für den linken Bereich lautet:

$$\text{Untere Grenze:} \quad g = \mu - 1{,}64 \cdot \sigma \approx 40 - 1{,}64 \cdot 5{,}6569 \approx 30{,}7227$$

Nach außen runden liefert den Ablehnungsbereich:

- Ablehnungsbereich: $[0, 30]$
- Annahmebereich: $[31, 200]$

Fehler 2. Art:

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit im Annahmebereich zu landen, wenn in Wirklichkeit nur 15% der Dosen minderbefüllt sind:

$$P_{0{,}15}(31 \leq X \leq 200) = \text{binomCdf}(200, 0.15, 31, 200) \approx 0{,}4515$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beläuft sich also auf rund 45,15%.

e) Beantworte die folgenden Fragen:

(i) Was passiert mit dem Fehler 2. Art, wenn man den Fehler 1. Art verringert?
Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art wird größer, wenn man das Signifikanzniveau und damit den Fehler 1 . Art verringert. Dadurch wird nämlich der Annahmebereich größer und damit auch die Wahrscheinlichkeit in ihm zu landen.

(ii) Wie kann man den Fehler 2. Art verringern?
Indem man die Stichprobengröße erhöht.

C.11 zu Matrizen & Austauschprozesse

zu Aufgabe 118: Berechne, was bei der Multiplikation der Matrizen herauskommt.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 41 \\ 13 & -49 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -12 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ nicht möglich, da Spaltenanzahl Matrix 1 $\neq$ Zeilenanzahl Matrix 2

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 23 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Bei e) und f) fällt auf, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Es gilt also im Allgemeinen nicht $A \cdot B = B \cdot A$.

zu Aufgabe 119: In einem Zoogehege befinden sich 60 Erdmännchen. Jeden Tag werden zur Mittagszeit zwei Futterstellen eröffnet, zu denen sich die Erdmännchen frei bewegen können. Wir nennen die Futterstellen A und B. Zu Beginn der Beobachtung gehen 36 Erdmännchen zur Futterstelle A und 24 zur Futterstelle B. Ab dann gehen 40% der Erdmännchen, die am Vortag bei der Futterstelle A waren zur Futterstelle B und 30% von der Futterstelle B zur Futterstelle A. Die anderen bleiben bei der gleichen Futterstelle wie am Vortag. Man kann annehmen, dass die Anzahl der Erdmännchen über den Beobachtungszeitraum gleich bleibt.

a) Stelle eine Matrix auf, die die beschriebenen Übergangsprozesse darstellt.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Erdmännchen sind nach einer Woche an den jeweiligen Futterstellen? Runde sinnvoll, falls notwendig.

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}^7 \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 25{,}72 \\ 34{,}28 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 26 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Nach einer Woche sind 26 Erdmännchen bei der Futterstelle A und 34 an der Futterstelle B.

c) Ist es möglich, dass ein und dasselbe Erdmännchen bei der Futterstelle A startet und dann 7-mal in Folge immer zur gleichen Futterstelle geht? Wenn ja: Berechne die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall, wenn man von den zuvor genannten Übergangswahrscheinlichkeiten ausgeht.

Ja, das ist möglich. Es gibt keinen Grund, warum ein Erdmännchen das nicht tun sollte, selbst dann, wenn es sich zufällig entsprechend der zuvor genannten Übergangswahrscheinlichkeiten entscheidet.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:
Erdmännchen startet bei der Futterstelle A und entscheidet sich dann 7-mal in Folge für die Futterstelle A (jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%). Wir nennen dieses Ereignis E:

$$P(E) = 0{,}6^7 \approx 0{,}028$$

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall liegt also bei rund 2,8%.

d) Die Mitarbeiter des Zoos wollen wissen, ob sie irgendwann immer die gleiche Menge an Futter zu den jeweiligen Futterstellen bringen können, da sich die Anzahl der Erdmännchen an den Futterstellen nicht mehr verändert. Ein Erdmännchen bekommt 100g Futter. Wie viel Gramm Futter müssen sie langfristig zu den jeweiligen Futterstellen bringen? Runde auch hier, falls nötig, sinnvoll.

Wir müssen hier herausfinden, ob es einen Fixvektor gibt. Dazu muss folgende Gleichung erfüllt werden:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diese übertragen wir in ein LGS und fügen als dritte Bedingung hinzu, dass $x + y = 60$ sein muss, da wir insgesamt 60 Erdmännchen beobachten:

$$\left| \begin{array}{rcl} 0{,}6x + 0{,}3y & = & x \\ 0{,}4x + 0{,}7y & = & y \\ x + y & = & 60 \end{array} \right|$$

Löst man es mit dem Taschenrechner, erhält man als Lösungen, dass $x \approx 25{,}71$ sein muss und $y \approx 34{,}29$. Sinnvoll gerundet ergibt das dauerhaft 26 Erdmännchen bei Futterstelle A und 34 bei Futterstelle B.

Da pro Erdmännchen mit 100g Futter gerechnet wird, müssen 2,6kg zu Futterstelle A und 3,4kg zu Futterstelle B gebracht werden.

e) Nach 5 Wochen werden 10 Erdmännchen in einen anderen Zoo gebracht. Gibt es erneut eine Verteilung wie in d)? Falls ja: Wie viel Gramm Futter müssen jetzt auf lange Sicht zu den jeweiligen Futterstellen gebracht werden? Runde auch hier, falls nötig, sinnvoll. Wir müssen hier das gleiche LGS wie in d) lösen, allerdings muss $x + y = 50$ sein, da wir ja 10 Erdmännchen weniger haben:

$$\left| \begin{array}{rcl} 0{,}6x + 0{,}3y & = & x \\ 0{,}4x + 0{,}7y & = & y \\ x + y & = & 50 \end{array} \right|$$

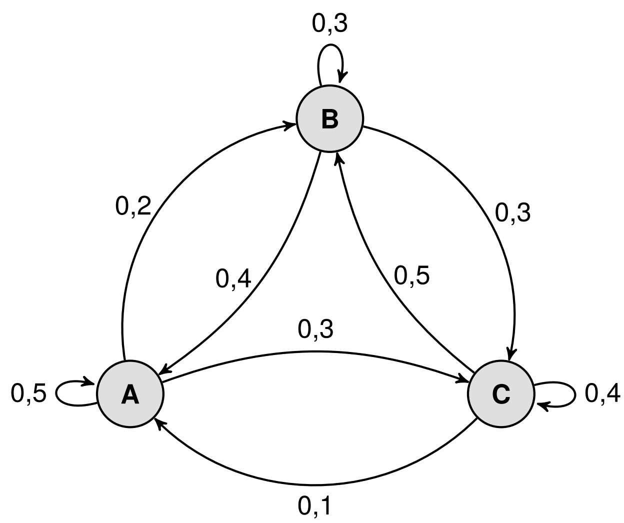
Als Ergebnis erhalten wir hier hier, dass $x \approx 21{,}43$ und $y \approx 28{,}57$ sein muss. Sinnvoll gerundet ergibt das dauerhaft 21 Erdmännchen bei Futterstelle A und 29 bei Futterstelle B.

Da pro Erdmännchen mit 100g Futter gerechnet wird, müssen 2,1 kg zu Futterstelle A und 2,9kg zu Futterstelle B gebracht werden.

zu Aufgabe 120: In einer Stadt gibt es drei große Fitnessstudios einer Kette. Wir nennen diese A, B und C. Das wöchentliche Wechselverhalten der Kunden wird näherungsweise in der folgenden Tabelle dargestellt:

		von		
		A	B	C
	A	0,5	0,4	0,1
nach	B	0,2	0,3	0,5
	C	0,3	0,3	0,4

a) Zeichne ein Schaubild zu diesem Wechselverhalten



b) Zu Beobachtungsbeginn besuchen 400 Kunden den Standort A, 800 den Standort B und 600 den Standort C. Wie sieht die Verteilung der Kunden nach einer und drei Wochen aus?Runde sinnvoll, falls nötig.

Startvektor: $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix}$

Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Nach einer Woche: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 580 \\ 620 \\ 600 \end{pmatrix}$

Nach drei Wochen: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$

c) Kann die Verteilung eine Woche vor Beobachtungsbeginn berechnet werden? Falls ja: Wie sah diese aus?

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.400 \\ 2.600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis macht leider im Sachkontext keinen Sinn, da nicht -1.400 Kunden beim Standpunkt A oder 2.600 beim Standpunkt B gewesen sein können.

d) Interpretiere, was es bedeutet, dass die Übergangsmatrix eine Spaltensumme von 1 hat.

Das bedeutet, dass zusammen 100% der Kunden beim jeweiligen Standort zu einem der anderen wechseln oder beim Standort bleiben und, dass niemand aus der Betrachtung ausscheidet oder hinzukommt. Die Anzahl der Kunden bleibt im gesamten Betrachtungskontext die ganze Zeit über gleich.

e) Was sagt der Eintrag a_{32} bei der mit 2 potenzierten Übergangsmatrix aus?

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}35 & 0{,}29 \\ 0{,}31 & 0{,}32 & 0{,}37 \\ 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}34 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $a_{32} = 0{,}33$ bedeutet, dass von der anfänglichen Anzahl der Kunden beim Standort B nach zwei Wochen 33% zu Standort C gewechselt sind.

f) Gibt es eine stabile Verteilung? Falls ja: Interpretiere sie im Sachkontext.

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}^{100} \approx \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Es gibt eine stabile Verteilung. Sie ist vorhanden, wenn jeweils 600 Kunden zu den drei Standorten gehen. Ist das einmal der Fall, so bleibt die Verteilung von 600 Kunden pro Standort immer gleich.

g) Aufgrund diverser Faktoren verändert sich das Wechselverhalten im Fitnessstudio C. Das von Studio *A* und B bleibt gleich. Gibt es ein, im Kontext sinnvolles, Wechselverhalten im Studio C, wenn langfristig dauerhaft 30% der Kunden im Studio A, 50% im Studio B und 20% im Studio C seien sollen? Wenn ja, wie sieht dieses aus?

Wir müssen herausfinden, für welche Werte die folgende Gleichung aufgeht:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & x \\ 0{,}2 & 0{,}3 & y \\ 0{,}3 & 0{,}3 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 540 \\ 900 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540 \\ 900 \\ 360 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung kommt zustande, indem man das Wechselverhalten vom Studio C in der Übergangsmatrix durch Variablen ersetzt und als Zustands- bzw. Ergebnisvektor den Vektor nimmt, der in der Aufgabe als langfristige Verteilung angegeben wird. Da dieser die langfristige Verteilung darstellt, muss er ja genauso noch einmal rauskommen, wenn man ihn mit der Übergangsmatrix malnimmt.

Wir schreiben die Gleichung nun in ein LGS und fügen noch als Bedingung hinzu, dass x, y und z zusammen 1 ergeben müssen (das muss man zwar in diesem Fall nicht machen, weil es nur eine Lösung gibt und das für die sowieso gilt, sollte man aber generell bei solchen Aufgaben immer beachten):

$$\left| \begin{array}{rcl} 540 \cdot 0{,}5 + 900 \cdot 0{,}4 + 360 \cdot x & = & 540 \\ 540 \cdot 0{,}2 + 900 \cdot 0{,}3 + 360 \cdot y & = & 900 \\ 540 \cdot 0{,}3 + 900 \cdot 0{,}3 + 360 \cdot z & = & 360 \\ x + y + z & = & 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} x & = & -0{,}25 \\ y & = & 1{,}45 \\ z & = & -0{,}2 \end{array} \right|$$

Da negative Zahlen im Kontext keinen Sinn machen, gibt es keine Lösung, die die Bedingungen aus der Aufgabe erfüllt.