

# Gymnasium Bayern

## Mathe Abitur Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben  
inkl. Lösungen & Lernvideos von

*Daniel Jung*



**Jahr:  
2023**



**StudyHelp**

© StudyHelp GmbH | Kundenidentifikationsnummer: e4ujK2Z



## **Mathe Abi Klausurenheft – Bayern**

Prüfungsjahr 2023

Copyright © 2023 StudyHelp  
StudyHelp GmbH, Paderborn  
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack  
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig  
Kontakt: [verlag@studyhelp.de](mailto:verlag@studyhelp.de)  
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages und des Autors unzulässig. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Auf verschiedenen Seiten dieses Buches befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie bei dem angegebenen Inhalt des Anbieters dieser Seite auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

### **E-Book**

# Inhalt

|          |                         |           |
|----------|-------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Abi Klausur 2023</b> | <b>4</b>  |
| 1.1      | <b>Aufgaben</b>         | <b>4</b>  |
| 1.1.1    | Prüfungsteil A          | 4         |
| 1.1.2    | Prüfungsteil B          | 9         |
| 1.2      | <b>Lösungen</b>         | <b>17</b> |
| 1.2.1    | Prüfungsteil A          | 17        |
| 1.2.2    | Prüfungsteil B          | 24        |

# 1 Abi Klausur 2023

## 1.1 Aufgaben

### 1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: 70 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

| Thema      | Aufgabe | Teilaufgabe | Punkte | Erledigt? |
|------------|---------|-------------|--------|-----------|
| Analysis   | 1       | a)          | 2      | ✓         |
|            |         | b)          | 3      |           |
|            | 2       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
|            | 3       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
|            | 4       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
| Geometrie  | 1       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
| Stochastik | 1       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |

## Analysis

### Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \ln(x - 3)$  mit maximaler Definitionsmenge  $D_f$  und Ableitungsfunktion  $f'$ .

- Geben Sie  $D_f$  und die Nullstellen von  $f$  an.
- Ermitteln Sie diejenige Stelle  $x \in D_f$ , für die  $f'(x) = 2$  gilt.

---

### Aufgabe 2:

Gegeben ist die in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definierte Funktion  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ .

- Geben Sie eine Gleichung der waagerechten Asymptote des Graphen von  $g$  sowie die Wertemenge von  $g$  an.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals  $\int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) \, dx$ .

---

### Aufgabe 3:

Eine in  $\mathbb{R}$  definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion  $f$  mit erster Ableitungsfunktion  $f'$  und zweiter Ableitungsfunktion  $f''$  hat folgende Eigenschaften:

- $f$  hat bei  $x_1$  eine Nullstelle.
- Es gilt  $f'(x_2) = 0$  und  $f''(x_2) \neq 0$ .
- $f'$  hat ein lokales Minimum an der Stelle  $x_3$ .

Abbildung 1 zeigt die Positionen von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ .

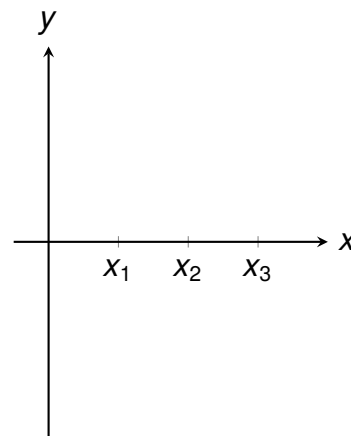


Abb. 1

- Begründen Sie, dass der Grad von  $f$  mindestens 3 ist.
- Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von  $f$ .

**Aufgabe 4:**

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$ , dessen einzige Extrempunkte  $(-1|1)$  und  $(0|0)$  sind, sowie den Punkt  $P$ .

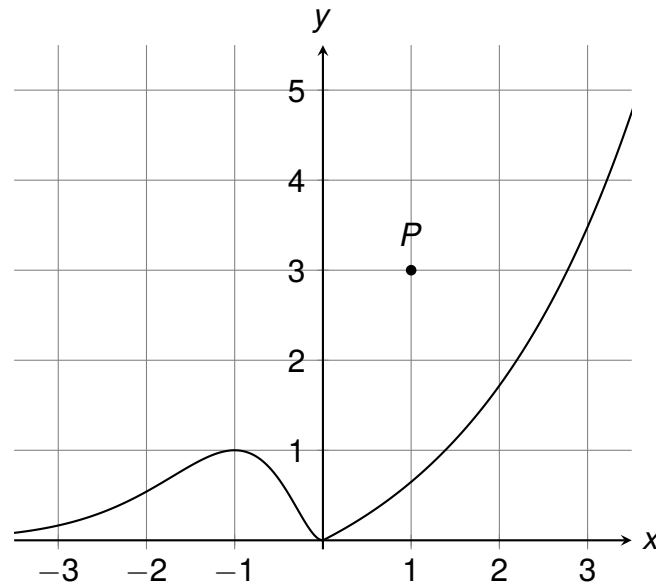


Abb. 2

- Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h$  mit  $h(x) = -g(x - 3)$  an.
- Der Graph einer Stammfunktion von  $g$  verläuft durch  $P$ . Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

**Stochastik****Aufgabe 1:**

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

- a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe.

- b) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird.

**Geometrie****Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Gerade  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $g$  in der Ebene mit der Gleichung  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$  liegt.
- b) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden

$$h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Weisen Sie nach, dass  $g$  und  $h_a$  für jeden Wert von  $a$  windschief sind.

### 1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: 200 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

| Thema      | Aufgabe | Teilaufgabe | Punkte | Erledigt? |
|------------|---------|-------------|--------|-----------|
| Analysis   | 1       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 5      |           |
|            |         | c)          | 1      |           |
|            |         | d)          | 3      |           |
|            |         | e)          | 3      |           |
|            |         | f)          | 4      |           |
|            |         | g)          | 4      |           |
|            |         | h)          | 2      |           |
|            | 2       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 2      |           |
|            |         | c)          | 2      |           |
|            |         | d)          | 5      |           |
|            |         | e)          | 5      |           |
| Stochastik | 1       | a)          | 4      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
|            |         | c)          | 2      |           |
|            |         | d)          | 3      |           |
|            |         | e)          | 3      |           |
|            | 2       |             | 2      |           |
|            | 3       | a)          | 2      |           |
|            |         | b)          | 3      |           |
| Geometrie  | 1       | a)          | 3      |           |
|            |         | b)          | 6      |           |
|            |         | c)          | 2      |           |
|            |         | d)          | 4      |           |
|            |         | e)          | 3      |           |
|            |         | f)          | 3      |           |
|            |         | g)          | 4      |           |

## Analysis

### Aufgabe 1:

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$ . Abbildung 1 zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$ , der die  $x$ -Achse als waagerechte Asymptote besitzt.

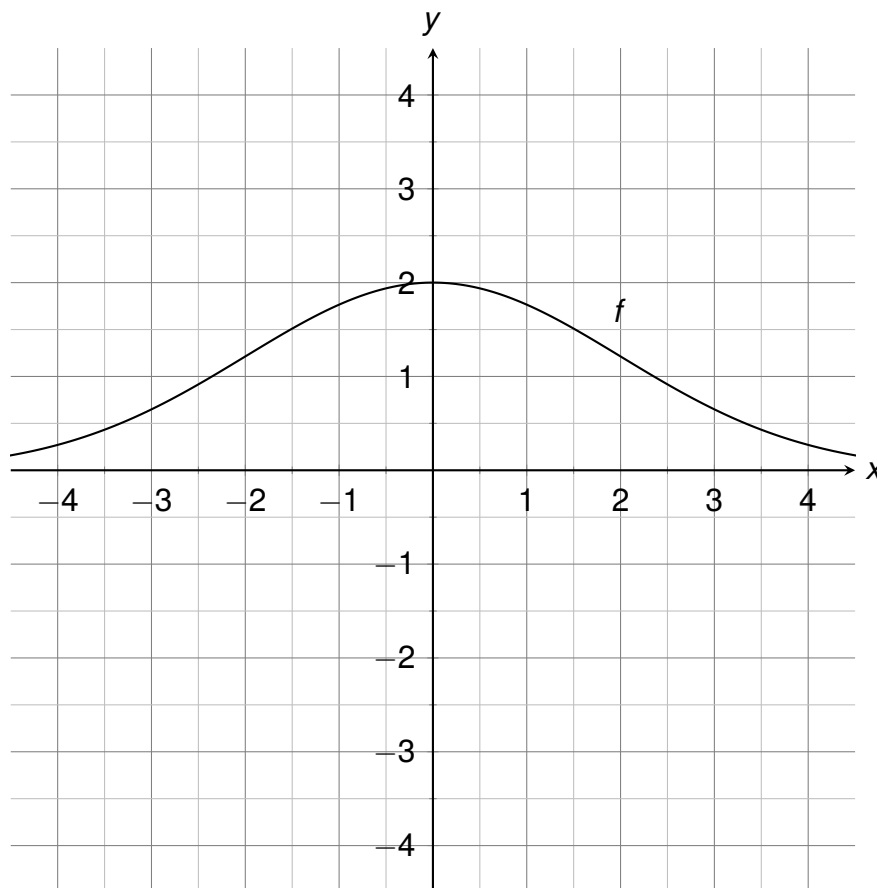


Abb. 1

- a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von  $G_f$  mit der  $y$ -Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass  $G_f$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse ist.
- b) Der Punkt  $W(-2 \mid 2e^{-\frac{1}{2}})$  ist einer der beiden Wendepunkte von  $G_f$ . Die Tangente an  $G_f$  im Punkt  $W$  wird mit  $w$  bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von  $w$  und berechnen Sie die Stelle, an der  $w$  die  $x$ -Achse schneidet.

$$\left[ \text{zur Kontrolle: } f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \right]$$

Betrachtet wird für jeden Wert  $c \in \mathbb{R}^+$  das Rechteck mit den Eckpunkten  $P(-c \mid 0)$ ,  $Q(c \mid 0)$ ,  $R(c \mid f(c))$  und  $S$ .

- c) Zeichnen Sie für  $c = 2$  das Rechteck  $PQRS$  in Abbildung 1 ein.

- d) Berechnen Sie denjenigen Wert von  $c$ , für den  $\overline{QR} = 1$  gilt.
- e) Geben Sie in Abhängigkeit von  $c$  die Seitenlängen des Rechtecks  $PQRS$  an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term  $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$  gegeben ist.
- f) Es gibt einen Wert von  $c$ , für den der Flächeninhalt  $A(c)$  des Rechtecks  $PQRS$  maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von  $c$ .

Betrachtet werden für  $k \in \mathbb{R}$  die in  $] -\infty, 0]$  definierten Funktionen  $f_k : x \mapsto f(x) + k$ . Somit gilt  $f_0(x) = f(x)$ , wobei sich  $f_0$  und  $f$  im Definitionsbereich unterscheiden.

- g) Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung von  $f_k$ , dass  $f_k$  für jeden Wert von  $k$  umkehrbar ist. Skizzieren Sie in Abbildung 1 den Graphen der Umkehrfunktion von  $f_0$ .
- h) Geben Sie alle Werte von  $k$  an, für die der Graph von  $f_k$  und der Graph der Umkehrfunktion von  $f_k$  keinen gemeinsamen Punkt haben.

### Aufgabe 2:

Abbildung 2 zeigt schematisch die Vorderseite einer Dachgaube. Die Vorderseite wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  aus Aufgabe 1, die  $x$ -Achse und die Geraden mit den Gleichungen  $x = -4$  und  $x = 4$  einschließen. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

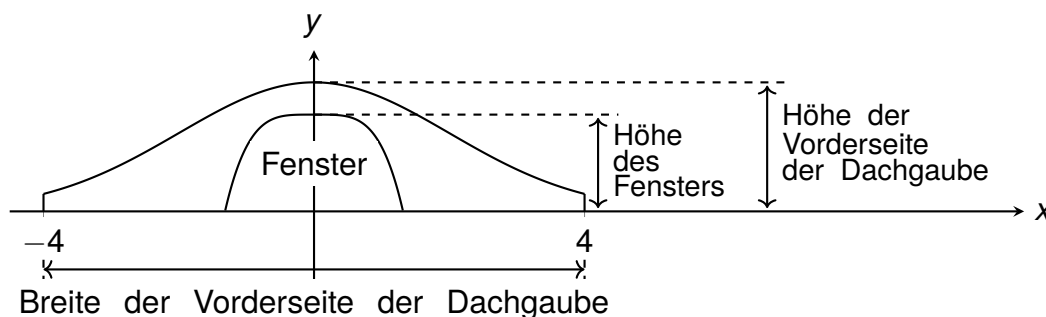


Abb. 2

- a) Geben Sie die Breite und die Höhe der Vorderseite der Dachgaube an.

In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell dem Flächenstück, dass der Graph der Funktion  $g$  mit

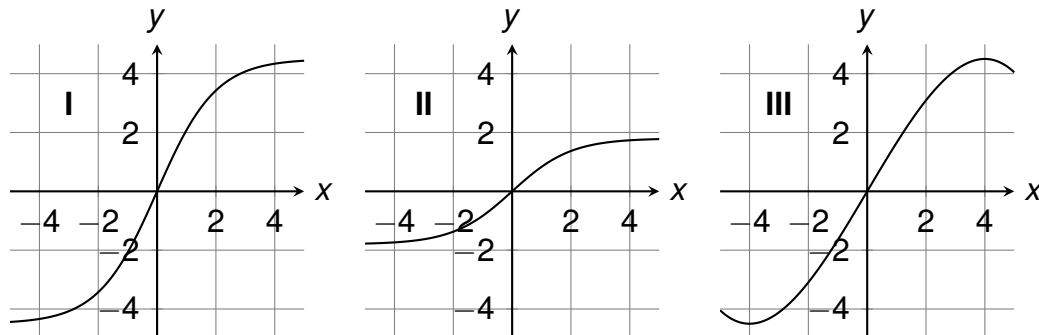
$$g(x) = ax^4 + b$$

und geeigneten Werten  $a, b \in \mathbb{R}$  mit der  $x$ -Achse einschließt (vgl. Abbildung 3).

- b) Begründen Sie, dass  $a$  negativ und  $b$  positiv ist.

Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  betrachtet.

- c) Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von  $F$ . Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



- d) Bestimmen Sie nun mithilfe des Graphen von  $F$  aus Aufgabe 2 c) den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).

Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von  $a$  rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fenstererhöhung von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube (also ohne Fenster), den Flächeninhalt  $6 \text{ m}^2$  hat.

- e) Um einen Näherungswert für die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite der Dachgaube berechnen zu können, wird  $G_f$  im Bereich  $-4 \leq x \leq 4$  durch vier Kreisbögen angenähert, die nahtlos ineinander übergehen und zueinander kongruent sind. Einer dieser Kreisbögen erstreckt sich im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  und ist Teil des Kreises mit Mittelpunkt  $M(0 \mid -1)$  und Radius 3. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des zu diesem Kreisbogen gehörenden Kreissektors und ermitteln Sie damit den gesuchten Näherungswert.

## Stochastik

### Aufgabe 1:

Im Dezember 2021 wurden in Norwegen rund 14 000 Pkw neu zugelassen. In einer vereinfachten Übersicht sind die Anteile der verschiedenen Antriebsarten an diesen Neuzulassungen dargestellt:

| Pkw mit Elektromotor |                | Pkw ohne Elektromotor (Verbrenner) |        |          |
|----------------------|----------------|------------------------------------|--------|----------|
| rein elektrisch      | Plug-in-Hybrid | Benzin                             | Diesel | Sonstige |
| 65%                  | 25%            | 3%                                 | 4%     | 3%       |

Für eine Untersuchung werden aus diesen Neuzulassungen 200 Fahrzeuge zufällig ausgewählt und deren Besitzer nach den Gründen für die Wahl der Antriebsart befragt. Da aus einer großen Anzahl von Fahrzeugen nur verhältnismäßig wenige ausgewählt werden, wird das Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor.“

E: „Unter den ausgewählten Pkw befinden sich mehr als 135 mit rein elektrischem Antrieb.“

b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$\sum_{k=0}^{25} \binom{200}{k} \cdot 0,1^k (1 - 0,1)^{200-k}$$

berechnet werden kann.

c) Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl an Pkw mit Elektromotor unter den ausgewählten Fahrzeugen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $X$ .

d) Für einen bestimmten Wert  $n \in \{1; 2; 3; \dots\}$  werden für  $p \in ]0; 1[$  die binomialverteilten Zufallsgrößen  $Z_p$  mit den Parametern  $n$  und  $p$  betrachtet. Weisen Sie nach, dass unter diesen Zufallsgrößen diejenige mit  $p = 0,5$  die größte Varianz hat.

e) Aus den neu zugelassenen Pkw mit Elektromotor werden 40 Fahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau zehn Plug-in-Hybride befinden.

**Aufgabe 2:**

In Deutschland waren zu Beginn des Jahres 2021 etwa 320 000 Pkw mit rein elektrischem Antrieb und 280 000 Plug-in-Hybride zugelassen, also insgesamt etwa 600 000 Pkw mit Elektromotor. Der Anteil der Pkw mit Elektromotor am Gesamtbestand aller in Deutschland zugelassenen Pkw betrug rund 1,2%. Bestimmen Sie die Anzahl der Pkw, die aus diesem Gesamtbestand mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97% mindestens ein Pkw mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.

---

**Aufgabe 3:**

Ein Autozulieferer hat zwei Betriebsstandorte *A* und *B*. Die Zahl der Beschäftigten am Standort *A* ist viermal so groß wie am Standort *B*. 60% aller Beschäftigten des Autozulieferers haben sich für den Kauf eines Jobtickets entschieden, mit dem die Firma die Nutzung des öffentlichen Personennahverkehrs für den Weg zur Arbeit fördert.

- a) Bestimmen Sie unter der Annahme, dass der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers am Standort *B* arbeitet und kein Jobticket besitzt.
- b) Tatsächlich ist der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten unterschiedlich; am Standort *B* besitzt nur die Hälfte der Beschäftigten ein Jobticket. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort *A* arbeitet.

## Geometrie

**Aufgabe 1:**

Gegeben sind die Punkte  $A(19|0|0)$ ,  $B(0|19|0)$ ,  $E(12|0|7)$  und  $F(0|12|7)$  (vgl. Abbildung 1). Das Viereck  $ABFE$  liegt in der Ebene  $L$ .

- Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABFE$  ein Trapez mit zwei gleichen langen Seiten ist.
- Bestimmen Sie eine Gleichung von  $L$  in Koordinatenform sowie die Größe  $\varphi$  des Winkels, den  $L$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt.

[zur Kontrolle:  $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$ ;  $\varphi \approx 55^\circ$ ]

Abbildung 1 zeigt den Körper  $ABCDEFGH$ , bei dem die quadratische Grundfläche  $ABCD$  parallel zur quadratischen Deckfläche  $EFGH$  liegt. Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der  $x_1x_3$ -Ebene als auch bezüglich der  $x_2x_3$ -Ebene. Außerdem werden die Punkte  $S_k(0|0|k)$  mit  $k \in ]7; +\infty[$  betrachtet, die Spitzen von den Pyramiden  $EFGHS_k$  sind.

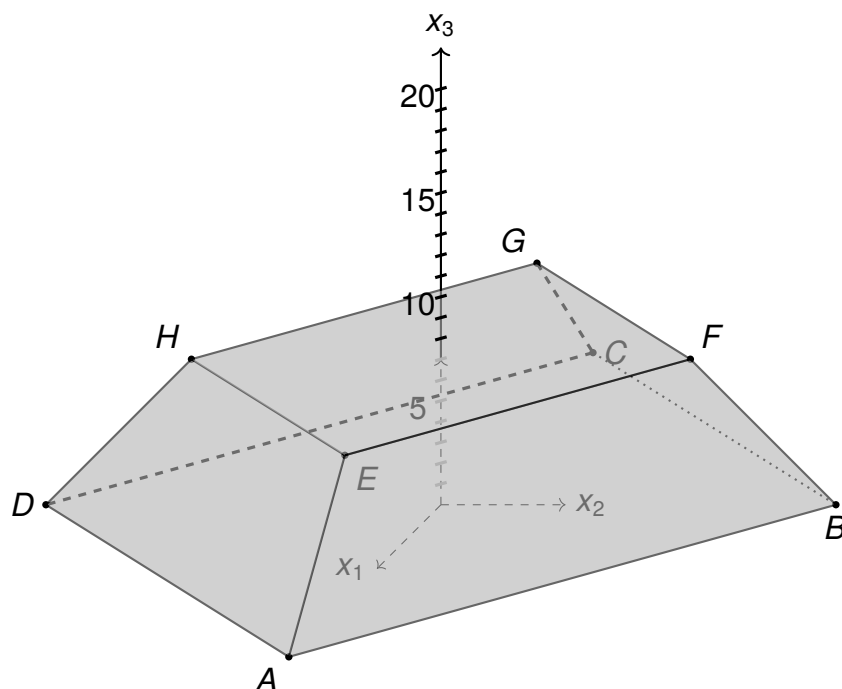


Abb. 1

- Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von  $k$ , für den die Pyramide  $EFGHS_k$  den Körper  $ABCDEFGH$  zu einer großen Pyramide  $ABCD S_k$  ergänzt.
- Zeichnen Sie die Pyramide  $EFGHS_{15}$  in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche  $EFS_{15}$  und die Grundfläche  $EFGH$  dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als  $45^\circ$  ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

[zur Kontrolle:  $k = 19$ ]

Für den Mittelpunkt  $M$  des Quadrats  $EFGH$  und den Punkt  $N$  mit

$$\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{e} + \vec{f}) \text{ gilt } \overline{MS_{15}} < \overline{MN}.$$

Der Körper  $ABCDEFGHS_{15}$  stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die  $x_1x_2$ -Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7m in der Realität.

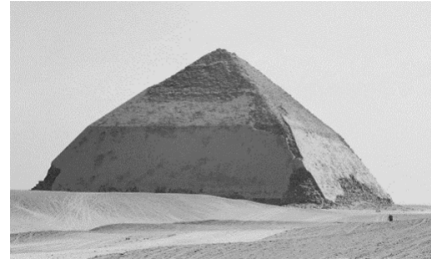


Abb. 2

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide  $ABCD S_{19}$  entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

- e) Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als  $9^\circ$  größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor  $\vec{S_{15}E}$  dargestellt werden. Die Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt  $T$  beschrieben. Die Lote durch die Punkte  $E, F, G, H$  und  $S_{15}$  auf die  $x_1x_2$ -Ebene schneiden diese in den Punkten  $E', F', G', H'$  bzw.  $S'$ . Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt  $T$  in Abbildung 3 dargestellt.

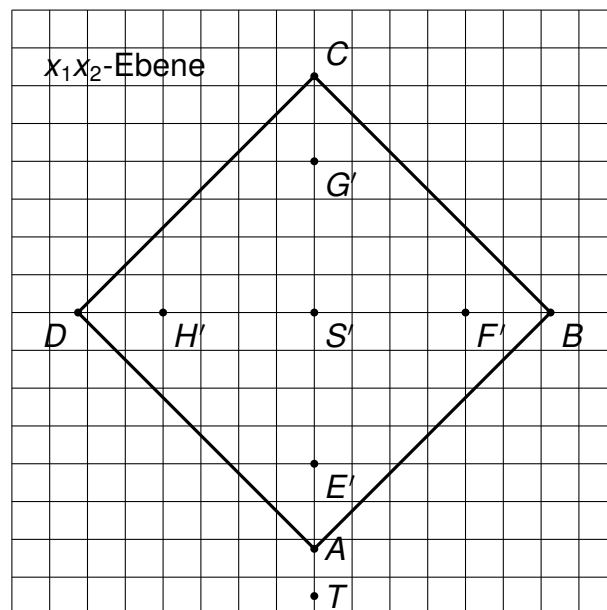


Abb. 3

- f) Berechnen Sie die Koordinaten von  $T$ .
- g) Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.

## 1.2 Lösungen

### 1.2.1 Prüfungsteil A

#### Analysis

##### zu Aufgabe 1:

- a) Wenn nach dem Definitionsbereich gesucht wird, müssen wir die Frage beantworten, was für die Variable (hier  $x$ ) alles eingesetzt werden darf. Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Argumente definiert. Wir können vereinfacht sagen:

$$\ln(\text{etwas}) \xrightarrow{\text{verlangt}} \text{etwas} > 0$$

Damit folgt aus

$$\begin{aligned} x - 3 &> 0 \quad | + 3 \\ \Leftrightarrow x &> 3 \end{aligned}$$

der maximale Definitionsbereich mit:

$$D_f = \mathbb{R}_{>3} = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\} = (3, \infty)$$

Zur Berechnung der Nullstellen setzen wir die Funktion gleich 0 und lösen nach  $x$  auf. Dafür verwenden wir zum Eliminieren des Logarithmus ihre Umkehrfunktion  $e^x$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \ln(x - 3) = 0 \quad | e^{\dots} \\ \Leftrightarrow e^{\ln(x-3)} &= e^0 \\ \Leftrightarrow x - 3 &= 1 \quad | + 3 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Die Nullstelle der Funktion  $f$  liegt bei  $x = 4$ .

- b) Wir bestimmen die Ableitungsfunktion von  $f(x)$  mit Hilfe der Kettenregel. Wenn der Logarithmus abgeleitet werden soll, können wir vereinfacht sagen:

$$(\ln(\text{etwas}))' \xrightarrow{\text{Ableitung}} \frac{1}{\text{etwas}} \cdot (\text{etwas})'$$

Damit folgt für die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x - 3))' \\ &= \frac{1}{x-3} \cdot (x - 3)' \\ &= \frac{1}{x-3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$



Grundlagen  
Logarithmus



Kettenregel

Da die Steigung der Funktion  $f$  den Wert 2 annehmen soll, setzen wir die Ableitungsfunktion gleich 2 und lösen nach  $x$  auf:

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow \frac{1}{x-3} = 2 & | \cdot (x-3) \\ \Leftrightarrow 1 &= 2x - 6 & | + 6 \\ \Leftrightarrow 7 &= 2x & | \div 2 \\ \Leftrightarrow x &= 3,5 \end{aligned}$$

Für  $x = 3,5$  hat die Funktion eine Steigung von 2. Wir prüfen anschließend, ob der errechnete Wert in unserem Definitionsbereich liegt: Da  $3,5 > 3$  ist  $3,5 \in D_f \checkmark$ .

### zu Aufgabe 2:

- a) Für die waagerechte Asymptote betrachten wir das Verhalten der Funktion für betragsmäßig große Zahlen. Wir schauen also, was für  $x \rightarrow \pm\infty$  passiert.

Das einzige vorkommende  $x$  liegt in quadratischer Form vor. Somit spielt das Vorzeichen keine Rolle, denn eine quadrierte Zahl (ob negativ oder positiv) ist immer positiv. Für sehr große  $x$  nähert sich der Bruch aus dem Positiven kommend der Null an, weil der Nenner unendlich groß wird. Insgesamt nähert sich der gesamte Ausdruck  $-1$  an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\downarrow 0} - 1 \rightarrow -1 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\downarrow 0} - 1 \rightarrow -1$$

Damit ist  $y = -1$  die waagerechte Asymptote.

Die Wertemenge bzw. der Wertebereich umfasst alle Funktionswerte, die für den Definitionsbereich herauskommen können. In der Bestimmung der Grenzwerte haben wir uns bereits überlegt, dass der Bruch niemals negativ wird und nur im Grenzfall gegen Null geht. Somit müssen alle Funktionswerte oberhalb der waagerechten Asymptote liegen. Der Wertebereich lautet:

$$W = \mathbb{R}_{>-1} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$$

- b) Wir bestimmen die Stammfunktion von  $g(x)$  und berechnen den Integralwert:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) dx &= \left[ -\frac{1}{x} - x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= -\frac{1}{2} - 2 - \left( -2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$



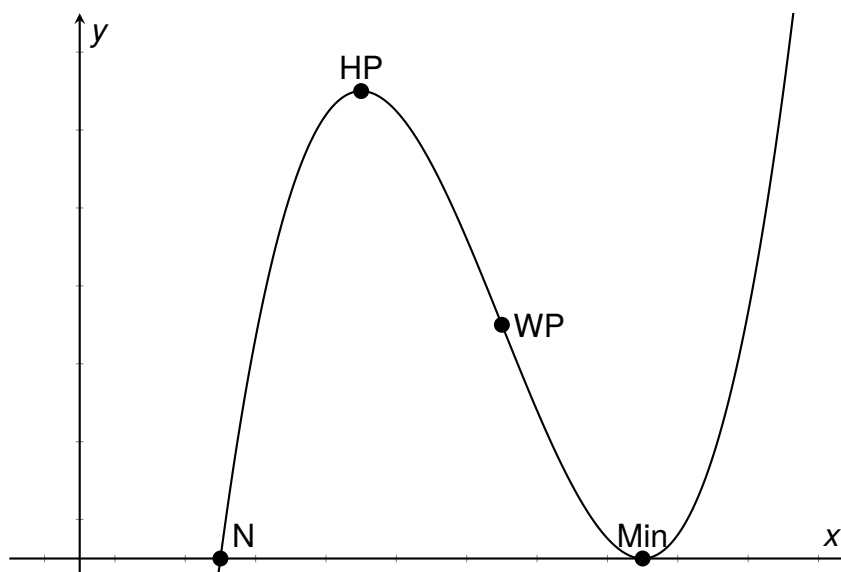
Grenz-  
verhalten



Integral-  
rechnung

**zu Aufgabe 3:**

- a) Die Extremstelle der Ableitungsfunktion ist der Wendepunkt der ursprünglichen Funktion. Da eine ganzrationale Funktion erst ab Grad 3 oder größer einen Wendepunkt aufweisen kann, muss die  $f$  mindestens vom Grad 3 sein.
- b) Wir machen eine Skizze der Funktion anhand der Eigenschaften. Da bei  $x_1$  eine Nullstelle liegt, machen wir dort eine Markierung. Zudem wissen wir, dass bei  $x_2$  ein Extrempunkt und bei  $x_3$  ein lokales Minimum vorliegt. Daraus lässt sich schließen, dass der Extrempunkt ein Hochpunkt sein und zwischen  $x_2$  und  $x_3$  ein Wendepunkt liegen muss. Da es nur ein qualitativer Verlauf sein soll, sind die  $y$ -Werte variabel.

**zu Aufgabe 4:**

- a) In Abbildung 2 ist der Graph der Funktion  $g$  dargestellt. Gesucht sind aber die Koordinaten des Tiefpunktes der Funktion  $h(x)$ , welche sich aus  $g(x)$  ableiten. Stichwort: Graphentransformation bzw. -manipulation!

Das negative Vorzeichen spiegelt den Graphen an der  $x$ -Achse (= vertikale Spiegelung). Damit wird aus einem Hochpunkt ein Tiefpunkt und umgekehrt. Wir gehen also vom Hochpunkt von  $g(x)$  aus. Die Koordinaten dieses Punktes werden beim Spiegeln mit einem umgekehrten Vorzeichen versehen ( $(-1 | -1)$ ). Des Weiteren wird der Graph von  $g$  um 3 Einheiten nach rechts verschoben. Dies geschieht auch mit dem Tiefpunkt. Damit lautet der Tiefpunkt von  $h(x)$ :  $T(2 | -1)$ .

- b) Die Stammfunktion von  $g(x)$  ist die Funktion  $G(x)$ . Es gilt:  $G'(x) = g(x)$ .

Durch diesen Zusammenhang können wir anhand einiger Punkte die Stammfunktion schematisch konstruieren. Wir wissen:

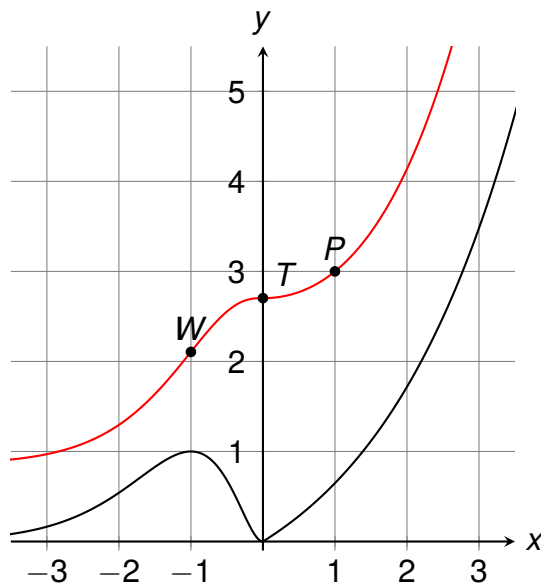


Graphen-  
transforma-  
tion



Graphisches  
integrieren

- $g(x)$  hat bei  $x = -1$  einen Hochpunkt. Das bedeutet, dass  $G(x)$  für  $x = -1$  einen Wendepunkt  $W$  besitzen muss.
- $g(x)$  hat bei  $x = 0$  eine doppelte Nullstelle. Somit muss für  $G(x)$  in  $x = 0$  ein Terrassenpunkt (Sattelpunkt)  $T$  vorliegen.
- Laut Aufgabenstellung soll  $G(x)$  durch den Punkt  $P$  gehen.



## Stochastik

### zu Aufgabe 1:

- a) Da der Würfel vier Seiten hat, beträgt das Eintreffen einer beliebigen Zahl (1, 2, 3 oder 4) immer  $p = \frac{1}{4}$ . Damit ist die Gegenwahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Zahl gewürfelt wird  $\frac{3}{4}$ .

Das hoch 5 bezieht sich darauf, dass der Würfel fünfmal geworfen wird. Damit ist ein mögliches Ereignis: „Die Zahl 1 wird fünfmal hintereinander nicht gewürfelt.“ (Jede andere Zahl wäre hier ebenfalls ein passendes Beispiel.)



Binomial-  
verteilung

- b) Wenn bei 5 Würfeln jede Zahl einmal vorkommen soll, dann kommt eine Zahl doppelt vor und die restlichen jeweils nur einmal. Betrachten wir folgendes Beispiel der gewürfelten Zahlen:

1 2 3 4 1

Hier kommt die 1 doppelt vor und der Rest einmal. Nun spielt die Reihenfolge der Zahlen hierbei keine Rolle. Die Zahlen aus dem Beispiel können auf

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

verschiedene Arten angeordnet werden. Da nicht unbedingt die 1, sondern auch die 2 oder 3 oder 4 doppelt vorkommen kann, gibt es 4 mögliche Zahlenkombinationen, die alle auf 60 verschiedene Arten angeordnet werden können. Das macht insgesamt  $4 \cdot 60 = 240$  mögliche Würfelerggebnisse.

Da der Würfel fünfmal geworfen wird und es 4 verschiedene Zahlen gibt, die dabei gewürfelt werden können, gibt es insgesamt  $4^5 = 1024$  mögliche Würfelerggebnisse. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Jede Zahl wird min. einmal gewürfelt}) = \frac{240}{1024} = \frac{15}{64}$$

## Geometrie

## zu Aufgabe 1:

- a) Aus der Geradengleichung in Parameterform lässt sich für die einzelnen Koordinaten jeweils eine Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 + \lambda \cdot 1 & \Leftrightarrow & x_1 = \lambda \\x_2 &= 1 + \lambda \cdot 0 & \Leftrightarrow & x_2 = 1 \\x_3 &= 1 + \lambda \cdot (-1) & \Leftrightarrow & x_3 = 1 - \lambda\end{aligned}$$



Lage-  
beziehung

Die allgemeinen Koordinaten lassen sich in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 = 2 &\Rightarrow \lambda + 1 + (1 - \lambda) = 2 \\&\Leftrightarrow 2 = 2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Es liegt eine allgemeingültige Aussage vor. Damit ist die Ebenengleichung für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  erfüllt und jeder Punkt auf der Geraden liegt in der Ebene.

- b) Es liegt mit  $h_a$  eine Geradenschar in Parameterform vor und wir sollen nachweisen, dass  $g$  und  $h_a$  für jeden Wert von  $a$  windschief sind. Daher prüfen wir zuerst, ob es ein  $a$  gibt, für das die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \text{I:} \quad & 1 = k \\ \text{II:} \quad & 0 = k \cdot a \\ \text{III:} \quad & -1 = 0 \quad \text{!} \end{aligned}$$



Lage 2er  
Geraden

Die dritte Zeile liefert bereits einen Widerspruch und daher verlaufen die Geraden nicht parallel zueinander. Wenn die Geraden sich außerdem nicht schneiden, sind sie windschief. Wir setzen die Geraden gleich, um einen möglichen Schnittpunkt zu finden:

$$\begin{aligned}g \stackrel{!}{=} h_a &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \\&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| -\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right.\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{I: } 0 = -\lambda + \mu \\ \Rightarrow \text{II: } 1 = a \cdot \mu \\ \Rightarrow \text{III: } 0 = \lambda \end{array}$$

liefert dank Gleichung III sofort  $\lambda = 0$ . Daraus folgt mit Gleichung I ebenfalls  $\mu = 0$ . Das führt in der Gleichung II allerdings zu einem Widerspruch:

$$\text{aus II folgt mit } \lambda, \mu = 0 \Rightarrow 1 = a \cdot 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \nexists$$

Somit können sich die beiden Geraden für keinen Wert  $a$  schneiden und müssen windschief zueinander liegen.

## 1.2.2 Prüfungsteil B

## Analysis

## zu Aufgabe 1:

- a) Auf der  $y$ -Achse haben alle Punkte den  $x$ -Wert Null. Daher setzen wir diesen Wert in die Funktion ein, um den gesuchten Schnittpunkt zu berechnen:

$$f(0) = 2e^{-\frac{1}{8} \cdot 0^2} = 2 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = 2$$

Somit lautet der Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse  $S_y(0|2)$ .

Eine Funktion, die achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist, erfüllt die folgende Gleichung:

$$f(-x) = f(x)$$

Wir bestimmen also  $f(-x)$ , indem wir in die Funktion  $(-x)$  einsetzen und vergleichen anschließend mit  $f(x)$ :

$$f(-x) = 2e^{-\frac{1}{8}(-x)^2} = 2e^{-\frac{1}{8}x^2} = f(x) \quad \checkmark$$

Somit ist die Funktion achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

- b) Gesucht ist die Tangente im Wendepunkt der Funktion. Da der Wendepunkt bekannt ist, berechnen wir zunächst die Steigung der Tangente im Punkt  $W$ . Mit Hilfe der Kettenregel folgt die Ableitungsfunktion. Auch hier können wir vereinfacht für die Ableitung von  $e$ -Funktion sagen:

$$(e^{\text{etwas}})' \xrightarrow{\text{Ableitung}} e^{\text{etwas}} \cdot (\text{etwas})'$$

Daraus folgt:

$$f'(x) = \left(2e^{-\frac{1}{8}x^2}\right)' = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot x^2\right)' = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{2}{8} \cdot x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

Nun setzen wir die Stelle  $x = -2$  des Wendepunktes ein und erhalten damit die Steigung im Punkt  $W$ :

$$f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{8}(-2)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Die Gleichung für die Tangente in  $x = x_0$  ist allgemein:

$$w(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Setzen wir alle Informationen in die Gleichung ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - (-2)) + 2e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



Achsen-  
symmetrie



$e$ -Funktion  
ableiten



Tangenten-  
gleichung

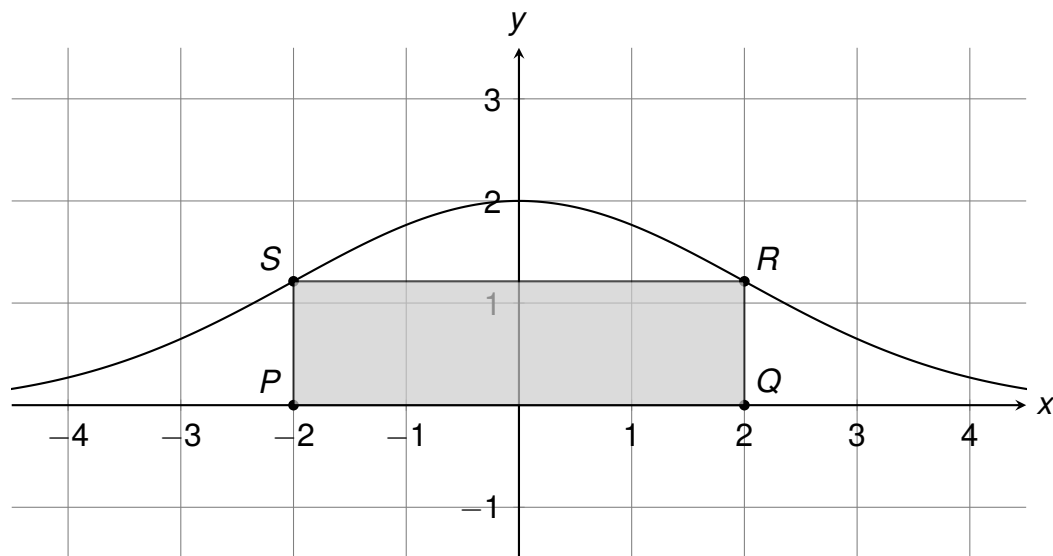
Damit hat die Wendetangente in  $W$  die Funktion:

$$w(x) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$$

Um den Schnittpunkt dieser Funktion mit der  $x$ -Achse zu bestimmen, setzen wir die Funktionsgleichung gleich Null:

$$\begin{aligned} w(x) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}} = 0 & | \div e^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x + 4 = 0 & | -4 \\ &\Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

- c) Damit die vier Punkte ein Rechteck bilden, muss der Punkt  $S$  die Koordinaten  $(-c|f(-c))$  haben. Für  $c = 2$  erhalten wir somit das Rechteck mit den Eckpunkten  $P(-2|0)$ ,  $Q(2|0)$ ,  $R(2|f(2))$  und  $S(-2|f(-2))$ .



- d) Die Strecke zwischen  $Q$  und  $R$  soll 1 ergeben. Der Abstand zwischen diesen Punkten ist gerade der Unterschied der  $y$ -Werte. Da der Punkt  $Q$  zudem auf der  $x$ -Achse liegt (und der  $y$ -Wert somit Null ist), ist der  $y$ -Wert von  $R$  gerade die Strecke  $\overline{QR}$ . Damit suchen wir:

$$\begin{aligned} \overline{QR} = f(c) &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow 2e^{-\frac{1}{8}c^2} = 1 & | \div 2 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}c^2} = \frac{1}{2} & | \ln(\dots) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}c^2 & | \cdot (-8) \\ &\Leftrightarrow -8 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = c^2 & | \sqrt{\dots} \\ &\Leftrightarrow \pm \sqrt{-8 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = c \end{aligned}$$

Da  $c \in \mathbb{R}^+$  sein soll, fällt die negative Wurzel weg und wir erhalten den gesuchten Wert für  $c$ :

$$c = \sqrt{-8 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 2,35$$



Gleichung  
mit  $e$  lösen

- e) Um den Flächeninhalt eines Rechtecks zu bestimmen, werden Höhe und Breite benötigt. Die Höhe des Rechtecks haben wir uns bereits in der letzten Teilaufgabe überlegt:  $\overline{QR} = \overline{PS} = f(c) = 2e^{-\frac{1}{8}c^2}$ .

Für die Breite bestimmen wir die Differenz der  $x$ -Werte  $c$  und  $-c$ :

$$\overline{PQ} = \overline{RS} = c - (-c) = 2c$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt demnach:

$$A(c) = 2c \cdot 2e^{-\frac{1}{8}c^2} = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \quad \checkmark$$

- f) Um den maximalen Flächeninhalt zu bestimmen, bestimmen wir die Extrempunkte von  $A(c)$ . Dafür bestimmen wir die Ableitungsfunktion mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} A'(c) &= \left( 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \right)' \\ &= 4e^{-\frac{1}{8}c^2} + 4c \cdot \left( -\frac{1}{4}c \right) e^{-\frac{1}{8}c^2} \\ &= (4 - c^2) \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \end{aligned}$$



Extrem-  
stellen

Nach dem Satz vom Nullprodukt wird diese Ableitungsfunktion genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null wird. Da die Exponentialfunktion niemals Null wird ( $e^{-\frac{1}{8}c^2} \neq 0$ ), muss also der andere Faktor Null werden:

$$\begin{aligned} A'(c) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4 - c^2 = 0 \quad | + c^2 \\ &\Leftrightarrow 4 = c^2 \quad | \sqrt{\dots} \\ &\Leftrightarrow \pm 2 = c \end{aligned}$$

Da  $c$  nur positive Werte annimmt, ist  $c = 2$ . Wir müssen jetzt noch prüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Dies können wir entweder über die zweite Ableitung oder durch die Überprüfung der Vorzeichen um die Extremstelle herum, herausfinden.

Wir prüfen die Vorzeichen und bestimmen  $A'(1)$  und  $A'(3)$ :

$$\begin{aligned} A'(1) &= e^{-\frac{1}{8} \cdot 1^2} (4 - 1^2) = e^{-\frac{1}{8}} \cdot 3 > 0 \\ A'(3) &= e^{-\frac{1}{8} \cdot 3^2} (4 - 3^2) = e^{-\frac{9}{8}} \cdot (-5) < 0 \end{aligned}$$

Somit liegt ein Vorzeichenwechsel in  $c = 2$  von positiv zu negativ vor. Also liegt in  $c = 2$  ein Maximum vor.

- g) Wir betrachten die Funktion:

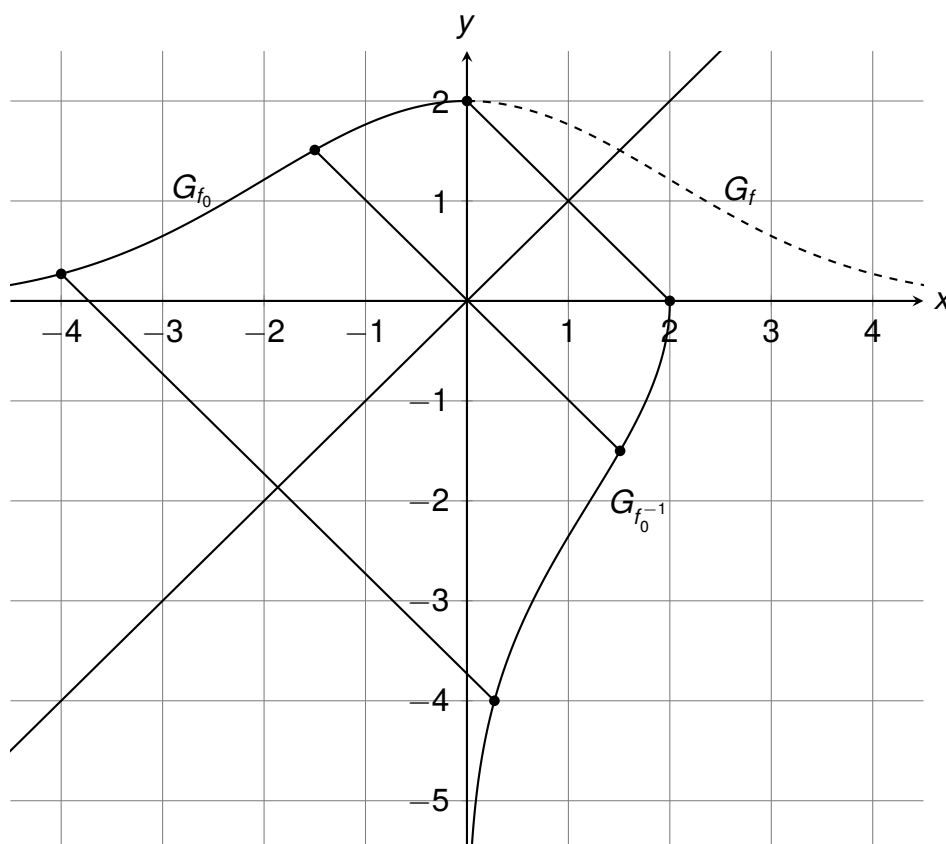
$$f_k(x) = f(x) + k = 2e^{-\frac{1}{8}x^2} + k$$

Die Ableitungsfunktion von  $f_k(x)$  folgt mit Hilfe der Kettenregel:

$$f'_k(x) = \left(2e^{-\frac{1}{8}x^2} + k\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{2}{8}x\right) e^{-\frac{1}{8}x^2} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

Da  $-\frac{1}{2} < 0$  und  $e^{-\frac{1}{8}x^2} > 0$  ist, wird das Vorzeichen von  $f'_k(x)$  durch den Faktor  $x$  bestimmt. Für positive  $x$  ist die Ableitungsfunktion negativ und für negative  $x$  ist die Ableitungsfunktion positiv. Für  $x = 0$  wird die gesamte Ableitungsfunktion zu Null. Da der Definitionsbereich von  $f_k$   $]-\infty, 0]$  ist, ist die Ableitungsfunktion für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich mit Ausnahme von  $x = 0$  positiv und somit ist  $f_k$  auf dem Intervall  $]-\infty, 0[$  streng monoton steigend. Zwar gilt  $f'_k(0) = 0$ , da dies aber am Rande des Definitionsbereichs liegt, verletzt dieser Punkt nicht die Umkehrbarkeit der Funktion  $f_k(x)$  auf dem Definitionsbereich.

Für die Zeichnung sollte die 1. Winkelhalbierende ( $y = x$ ) eingezeichnet werden. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion muss die Funktion selbst lediglich an der Winkelhalbierenden gespiegelt werden. Man spiegelt ein paar Punkte und verbindet diese dann zu einem Graphen:



- h) Der Parameter  $k$  in  $f_k$  verschiebt den Graphen von  $f$  um  $k$  Einheiten nach oben bzw. unten.  $f_k$  hat genau dann gemeinsame Punkte mit der Umkehrfunktion, wenn  $f_k$  die 1. Winkelhalbierende schneidet. Schneidet  $f_k$  die Winkelhalbierende nicht, so liegt  $f_k$  komplett oberhalb der Winkelhalbierenden.



Umkehr-  
barkeit

Da die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden entsteht, kann die Umkehrfunktion nur ausschließlich unterhalb der Winkelhalbierenden liegen.

Da der Wert  $k$  die Höhe des Graphen beeinflusst, suchen wir das  $k$ , für das der Graph von  $f$  das erste Mal die Winkelhalbierende berührt. Wenn wir  $k$  dann weiter verringern, rutscht der Graph weiter nach unten und es besteht weiterhin ein Schnittpunkt.

Man erkennt schnell, dass  $f_k(0)$  den kleinsten vertikalen Abstand zur 1. Winkelhalbierenden hat. Also bestimmen wir, für welchen Wert  $f_k(0) = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} f_k(0) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow f(0) + k = 0 \\ &\Rightarrow 2 + k = 0 \quad | -2 \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Somit hat  $f_k$  keine gemeinsamen Punkte mit  $f_k^{-1}$  (die Umkehrfunktion), solange  $k > -2$  gilt.

### zu Aufgabe 2:

- a) Die Breite der Dachgaube wird festgelegt durch die Geraden mit den Gleichungen  $x = -4$  und  $x = 4$ . Damit beträgt die Breite

$$4 - (-4) = 8 \text{ Meter.}$$

Die Höhe wird durch den Schnittpunkt der Funktion  $f = 2e^{-\frac{1}{8} \cdot x^2}$  und der  $y$ -Achse festgelegt. Damit beträgt die Höhe

$$f(0) = 2e^{-\frac{1}{8} \cdot 0^2} = 2 \text{ Meter.}$$

- b) Die Funktion  $g$  ist eine Parabel 4. Ordnung. Jede Parabel, deren Funktionsgleichung ein positives Vorzeichen besitzt, ist nach oben geöffnet. Ein negatives Vorzeichen hingegen führt zu einer Parabel, die nach unten geöffnet ist. Daher muss  $a$  negativ sein.

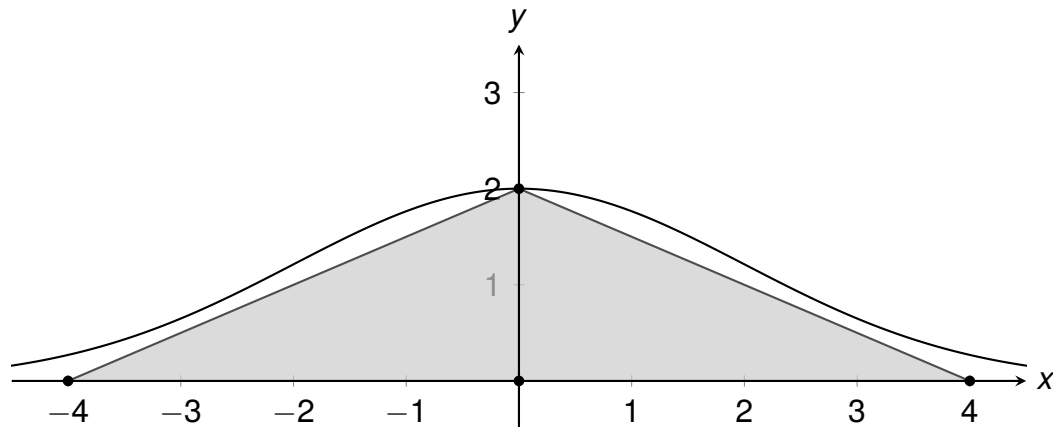
Der konstante Faktor beschreibt den Schnittpunkt des Graphen mit der  $y$ -Achse. Da die  $y$ -Achse oberhalb des Ursprungs geschnitten wird, muss  $b$  positiv sein.

- c) Die Stammfunktion  $F$  von  $f$  beschreibt die Flächenbilanz zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse. Da die Funktion  $f$  symmetrisch ist, können wir eine Hälfte des Gebildes betrachten. Es gilt

$$\int_0^a f(x) \, dx = F(a)$$

Setzen wir  $a = 4$  ein, erhalten wir also  $F(4)$  für den Flächeninhalt.

Konstruieren wir ein Dreieck, dessen Hypotenuse die Verbindung zwischen den Punkten  $(0|2)$  und  $(4|0)$  ist, dann hat dieses Dreieck einen etwas kleineren Flächeninhalt als  $F(4)$ .



Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

Damit wissen wir, dass  $F(4) > 4$  gelten muss.

Betrachten wir nun den Graphen II, so sehen wir, dass dort  $F(4) < 2$ . Somit kann Graph II nicht unsere Stammfunktion abbilden.

Graph III erfüllt zwar  $F(4) > 4$ , allerdings ist bei  $x = 4$  ein Hochpunkt. Das würde aber bedeuten, dass  $f(4) = 0$  gilt. Wir sehen in der Abbildung jedoch, dass  $f$  keine Nullstelle in  $x = 4$  besitzt. Somit bleibt der Graph I als Graph der Stammfunktion übrig.

d) Der Graph von  $f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, also ist

$$\int_{-4}^4 f(x) \, dx = 2 \cdot \int_0^4 f(x) \, dx.$$

Da wir den Flächeninhalt mit Hilfe des Graphen aus c) bestimmen können, lesen wir die Werte aus der Skizze ab. Der Wert beträgt ungefähr  $F(4) \approx 4,8$  und  $F(0) = 0$ . Damit ist der Flächeninhalt der gesamten Gaube ungefähr  $2 \cdot 4,8 = 9,6 \, \text{m}^2$ .

Daraus können wir auch den Parameter  $a$  bestimmen. Dafür sind die folgenden Schritte notwendig:

- Die gesamte Fläche ist ungefähr  $9,6 \, \text{m}^2$ . Die Fläche ohne Fenster soll  $6 \, \text{m}^2$  betragen. Damit hat das Fenster einen Flächeninhalt von

$$9,6 - 6 = 3,6 \, \text{m}^2$$

- Da die Höhe des Fensters 1,5 m beträgt, muss der Graph bei 1,5 die  $y$ -Achse schneiden und der konstante Summand ist  $b = 1,5$ .

$$g(x) = ax^4 + 1,5$$

- Der Flächeninhalt unter dem Graphen von  $g$  geht von einer Nullstelle zur nächsten. Aufgrund von Symmetrie ist es ausreichend, eine Nullstelle zu berechnen. Diese lässt sich über  $g(x) = 0$  allgemein in Abhängigkeit von  $a$  bestimmen. Bezeichnen wir sie mit  $x_N$ .
- Als letztes kann die folgende Gleichung aufgestellt und nach  $a$  aufgelöst werden:

$$2 \cdot \int_0^{x_N} (ax^4 + 1,5) dx = 3,6$$

Damit haben wir die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs aufgezeigt.

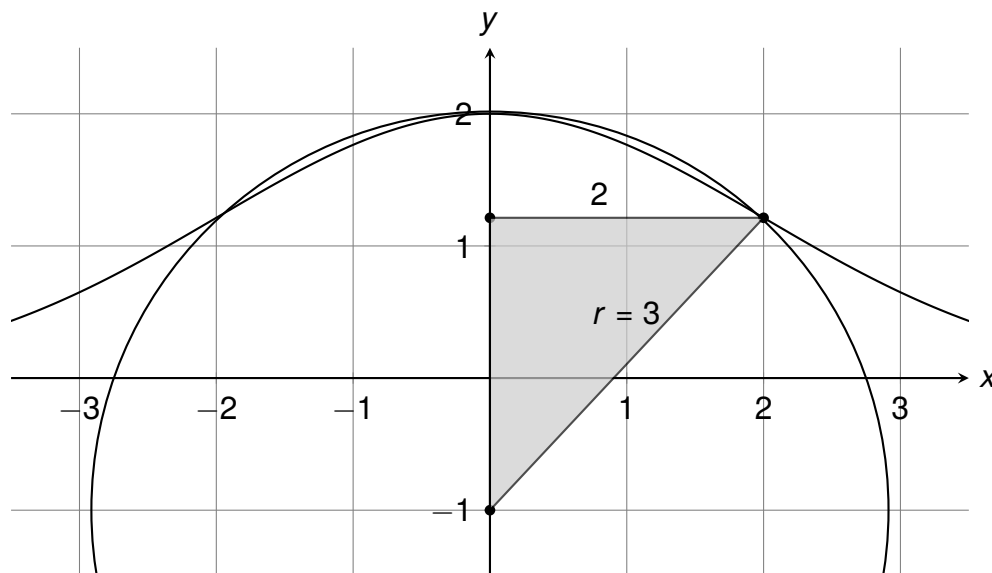
- e) Da die 4 Kreisbögen kongruent sind, haben sie die gleiche Größe. Es reicht also aus, lediglich einen Kreisbogen zu berechnen. Wir fokussieren uns auf den Kreisbogen im Bereich  $0 \leq x \leq 2$ . Die Formel für den Kreisbogen lautet:

$$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$



Kreisbogen

Um den Kreisbogen zu berechnen, benötigen wir also den Öffnungswinkel  $\alpha$  und den Radius des Kreises, welcher laut Aufgabenstellung  $r = 3$  beträgt. Für den Winkel zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck ein



und berechnen mit Hilfe des Sinus den Winkel  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha \approx 41,81^\circ$$

Anschließend können wir die Werte in die Gleichung für den Kreisbogen einsetzen und erhalten:

$$p = 4 \cdot b = 4 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 8\pi \cdot 3 \cdot \frac{41,81^\circ}{360^\circ} \approx 8,76 \text{ Meter}$$

Damit ist die Länge der Profillinie  $p$  ungefähr 8,76 m.

## Stochastik

### zu Aufgabe 1:

- a) Gemäß der Aufgabenstellung wird das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet, was der Anwendung der Binomialverteilung entspricht:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $D$  und  $E$ .

- D: Der Tabelle entnehmen wir die Wahrscheinlichkeit für einen Dieselmotor ( $p_D = 0,04$ ). Unter den  $n = 200$  ausgewählten PKW befinden sich sieben oder acht Verbrenner. Also folgt mit  $k = 7$  oder  $k = 8$ :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= B(200; 0,04; 7) + B(200; 0,04; 8) \\ &= \binom{200}{7} \cdot 0,04^7 \cdot 0,96^{193} + \binom{200}{8} \cdot 0,04^8 \cdot 0,96^{192} \\ &\approx 0,2842 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 200 ausgewählten PKW sieben oder acht Verbrenner mit Dieselmotor befinden, beträgt 28,42%.

- E: Der Tabelle entnehmen wir die Wahrscheinlichkeit für einen rein elektrischen Motor ( $p_E = 0,65$ ). Unter den  $n = 200$  ausgewählten PKW befinden sich mehr als 135 ( $k$ ) mit rein elektrischen Antrieb. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(X > 135) \\ &= 1 - P(X \leq 135) \\ &= 1 - F(200; 0,65; 135) \\ &\approx 0,2082 \end{aligned}$$

Das Ergebnis folgt mit dem GTR oder der  $F$ -Tabelle im Tafelwerk. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 200 ausgewählten PKW mehr als 135 mit rein elektrischem Motor befinden, beträgt 20,82%.

- b) Aus dem Term können wir ablesen, dass der Stichprobenumfang weiterhin  $n = 200$  beträgt und die Wahrscheinlichkeit  $p = 0,1$  ist. Betrachtet man die gegebene Tabelle, findet man zwar nicht direkt den Wert von 10%, allerdings erhalten wir ihn, wenn die gegebenen Wahrscheinlichkeiten für PKW ohne Elektromotor addiert werden:  $3\% + 4\% + 3\% = 10\%$ . Also ist bei der gegebenen Summe von PKW ohne Elektromotor (Verbrenner) die Rede. Die Summe läuft von  $k = 0$  bis  $k = 25$ . Damit betrachten wir die Wahrscheinlichkeit von  $P(X \leq 25)$  und ein Ereignis könnte lauten:

„Unter 200 PKW werden höchstens 25 PKW ohne Elektromotor (Verbrenner) ausgewählt.“

- c) Bei einer binomialverteilten Zufallsvariable wird der Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  wie folgt berechnet:

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Der Stichprobenumfang beträgt weiterhin  $n = 200$  und es fehlt noch die Wahrscheinlichkeit. Da  $X$  die Anzahl der PKW mit Elektromotor beschreibt, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten der rein elektrischen Fahrzeuge und Plug-in-Hybride addieren:

$$p_E = 0,65 + 0,25 = 0,9$$

Damit sind die gesuchten Werte:

- Erwartungswert:  $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,9 = 180$
- Standardabweichung:  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{200 \cdot 0,9 \cdot 0,1} \approx 4,24$

- d) Die Varianz ist das Quadrat der Standardabweichung, also

$$V(p) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot (p - p^2).$$

Da die größte Varianz nachgewiesen werden soll, müssen wir die allgemein von  $p$  abhängige Funktion auf Extrema untersuchen. Wir leiten daher zunächst ab und lösen anschließend nach der Unbekannten auf:

$$\begin{aligned} V'(p) &= (n \cdot (p - p^2))' = n \cdot (1 - 2p) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 1 - 2p = 0 \quad | + 2p \\ &\Leftrightarrow 1 = 2p \quad | \div 2 \\ &\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da  $n$  nicht Null ist und nach dem Satz des Nullprodukts einer der beiden Faktoren Null sein muss, vereinfacht sich die Gleichung zu  $1 - 2p = 0$ . Jetzt müssen wir noch erklären, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt. Da  $V(p)$  eine Parabel beschreibt, welche nach unten geöffnet ist (negatives Vorzeichen vor  $p^2$  und  $n \geq 0$ ), muss ein Maximum vorliegen.

- e) Da wir nur von den Elektromotoren wählen, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten. Wenn 25% aller betrachteten Autos Plug-In-Hybride und insgesamt 90% aller Autos Elektromotoren sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Hybrid unter den Autos mit Elektromotor ist:

$$p_{\text{Elektromotor}}(\text{Hybrid}) = \frac{0,25}{0,9} = \frac{5}{18}$$



Erwartungs-  
wert und  
Standard-  
abweichung

Jetzt werden  $n = 40$  Autos mit Elektromotor zufällig ausgewählt und wir sollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass unter diesen 40 Autos genau  $k = 10$  Hybride sind:

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= B(40; \frac{5}{18}; 10) \\ &= \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{10} \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{30} \\ &\approx 0,1335 \end{aligned}$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit ungefähr 13,35%

**zu Aufgabe 2:** Wir benötigen zuerst den Anteil der PKW mit einem rein elektrischen Antrieb. Da es etwa 320 000 PKW mit einem rein elektrischen und 600 000 PKW mit Elektromotor gibt, sind

$$\frac{320\,000}{600\,000} = \frac{8}{15}$$

aller Autos mit Elektromotor rein elektrisch. Der Anteil der PKW mit Elektromotor beträgt rund 1,2% aller Autos. Damit ist der Anteil rein elektrischer Fahrzeuge unter allen PKW

$$\frac{8}{15} \cdot 0,012 = \frac{4}{625} = 0,0064,$$

also 0,64% haben einen rein elektrischen Antrieb ( $p_{\text{rein E}} = 0,0064$ ).

Da wir die Wahrscheinlichkeit wissen wollen, dass **mindestens** ein PKW mit rein elektrischem Antrieb ausgewählt wird, gehen wir über die Gegenwahrscheinlichkeit:

$$P(X \geq 1) = P(X > 0) = 1 - P(X = 0)$$

Da die Zufallsgröße binomialverteilt ist, gilt

$$P(X = 0) = (1 - 0,0064)^n$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 - P(X = 0) &> 0,97 && | - 1 \\ \Leftrightarrow -P(X = 0) &> -0,03 && | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow P(X = 0) &< 0,03 \\ \Leftrightarrow (1 - 0,0064)^n &< 0,03 \\ \Leftrightarrow 0,9936^n &< 0,03 && | \ln(\dots) \\ \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,9936) &< \ln(0,03) && | : \ln(0,9936) (< 0) \\ \Leftrightarrow n &> \frac{\ln(0,03)}{\ln(0,9936)} \\ \Leftrightarrow n &\geq 547 \end{aligned}$$



3-Mal  
mindestens  
Aufgabe

Es müssen mindestens 547 PKWs ausgewählt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97% mindestens ein PKW mit rein elektrischem Antrieb darunter ist.

### zu Aufgabe 3:

- a) Wir legen eine kleine Vierfeldertafel an und bezeichnen  $A$  als Mitarbeiter an Standort  $A$ ,  $B$  als Mitarbeiter an Standort  $B$  und  $J$  steht für das Jobticket bzw.  $\bar{J}$  für kein Jobticket. Dann suchen wir die Wahrscheinlichkeit  $P(B \cap \bar{J})$ . Da der Anteil der Beschäftigten mit einem Jobticket an beiden Standorten gleich ist, bedingt kein Standort die Wahrscheinlichkeit, jemanden mit einem Jobticket anzutreffen. Das bedeutet, die Ereignisse sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$P(B) \cdot P(\bar{J}) = P(B \cap \bar{J}).$$

Wir suchen also  $P(B)$  und  $P(\bar{J})$ . Da 60% aller Beschäftigten sich für ein Jobticket entschieden haben, folgt  $J = 0,6$  bzw.  $\bar{J} = 1 - 0,6 = 0,4$ . Die Zahl der Beschäftigten am Standort  $A$  ist viermal so groß wie am Standort  $B$ . Da es in Summe 100% sein müssen, kann nur  $A = 0,8$  bzw.  $B = 0,2$  folgen.

|          | $J$        | $\bar{J}$  | $\Sigma$   |
|----------|------------|------------|------------|
| $A$      | 0,48       | 0,32       | <b>0,8</b> |
| $B$      | 0,12       | 0,08       | <b>0,2</b> |
| $\Sigma$ | <b>0,6</b> | <b>0,4</b> | 1          |



Vierfelder-  
tafel

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ein Beschäftigter am Standort  $B$  arbeitet und kein Jobticket besitzt, liegt somit bei

$$P(B \cap \bar{J}) = P(B) \cdot P(\bar{J}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$$

- b) Dieses Mal sind die Anteile an Beschäftigten mit Jobticket nicht mehr an beiden Standorten gleich. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der ein Jobticket besitzt, am Standort  $A$  arbeitet. Bei diesem Aufgabentyp handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung, dass der Beschäftigte ein Jobticket besitzt:

$$P(A|J) = \frac{P(A \cap J)}{P(J)}$$

Wir wissen, dass  $P(J) = 0,6$  ist und suchen somit  $P(A \cap J)$ . Dafür bestimmen wir zuerst  $P(B \cap J)$ , denn wir wissen aus unseren Berechnungen von a), dass  $P(B) = 0,2$  und aus der Aufgabenstellung, dass  $P(J|B) = 0,5$  ist:

$$P(B \cap J) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$



Bedingte  
Wahrschein-  
lichkeit

Mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit lässt sich  $P(A \cap J)$  bestimmen, denn es gilt:

$$P(A \cap J) = P(J) - P(B \cap J) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Beschäftigter des Autozulieferers, der ein Jobticket besitzt, am Standort  $A$  arbeitet, beträgt

$$P(A|J) = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}.$$

## Geometrie

## zu Aufgabe 1:

- a) Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallel zueinander liegenden Seiten. Wir müssen also prüfen, ob entweder  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$  oder  $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BF}$  gilt. Der Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass vermutlich  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$  gilt. Dafür bestimmen wir zunächst die beiden Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen, ob die Vektoren Vielfache voneinander sind und sehen direkt

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -19 &= -12k \\ 19 &= 12k \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

dass die Gleichung mit  $k = \frac{19}{12}$  gelöst werden kann. Damit ist das Viereck  $ABFE$  ein Trapez.

Es soll aber zusätzlich gezeigt werden, dass zwei Seiten gleich lang sind. Wären  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{EF}$  gleichlang, hätten sie dieselben Werte, da wir bereits wissen, dass die Vektoren parallel verlaufen. Also prüfen wir die anderen Seiten des Trapezes und berechnen die Vektoren:

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Betrag liefert uns die Länge der Seiten:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AE}| &= \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{98} \text{ [LE]} \\ |\overrightarrow{BF}| &= \sqrt{0^2 + (-7)^2 + 7^2} = \sqrt{98} \text{ [LE]} \end{aligned}$$

Somit ist das Viereck  $ABFE$  ein Trapez, das zudem noch zwei gleichlange Seiten hat.



Vektoren  
beschreiben  
ein Viereck



Länge eines  
Vektors

- b) Um die Ebenengleichung  $L$  aufzustellen, benötigen wir zuerst zwei Richtungsvektoren. Wir haben als mögliche Kandidaten  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AE}$  bestimmt. Mit Hilfe dieser beiden Vektoren lässt sich mittels Kreuzprodukt ein Normalenvektor der Ebene bestimmen:

$$\vec{n}_L = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133 \\ 133 \\ 133 \end{pmatrix} = 133 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten des Normalenvektors bilden die Vorfaktoren der  $x_i$  in der Koordinatengleichung. Wir bestimmen noch das Skalarprodukt zwischen Normalenvektor und einem Punkt der Ebene (z.B.  $A$ )

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}_L = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 19$$

Damit ergibt sich die Ebenengleichung zu  $L : x_1 + x_2 + x_3 = 19$ .

Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich zu dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Das heißt, dass man nur den Winkel zwischen den Normalenvektoren ausrechnen muss, um an den Winkel zwischen den beiden Ebenen zu kommen. Der Normalenvektor der  $x_1x_2$ -Ebene ist  $\vec{n}_{x_1x_2} = (0 \ 0 \ 1)^T$ . Die Länge der Normalenvektoren lautet:

$$\begin{aligned} |\vec{n}_L| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ |\vec{n}_{x_1x_2}| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

Für den Winkel  $\varphi$  gilt dann mit Hilfe der Formel:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n}_L \cdot \vec{n}_{x_1x_2}}{|\vec{n}_L| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi \approx 54,74^\circ$$

- c) Die Spitze der Pyramide  $S_k(0|0|k)$  muss auf der Geraden durch die Punkte  $A$  und  $E$  gehen. Auch durch die Geraden, welche die anderen Seitenkanten verlängern. Allerdings haben wir  $\overrightarrow{AE}$  schon bestimmt, deshalb entscheiden wir uns für diese Seitenkante.

Die Gerade durch die Punkte  $A$  und  $E$  lautet:

$$g_{AE} : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$



Koordinaten-  
form



Kreuzprodukt

Diese Gleichung können wir mit der allgemeinen Form von  $S_k$  gleichsetzen und mit Hilfe des Gleichungssystems  $k$  bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{I: } 0 = 19 - 7r$$

$$\Rightarrow \text{II: } 0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{III: } k = 7r$$

Die erste Gleichung liefert uns einen Wert für  $r$ :

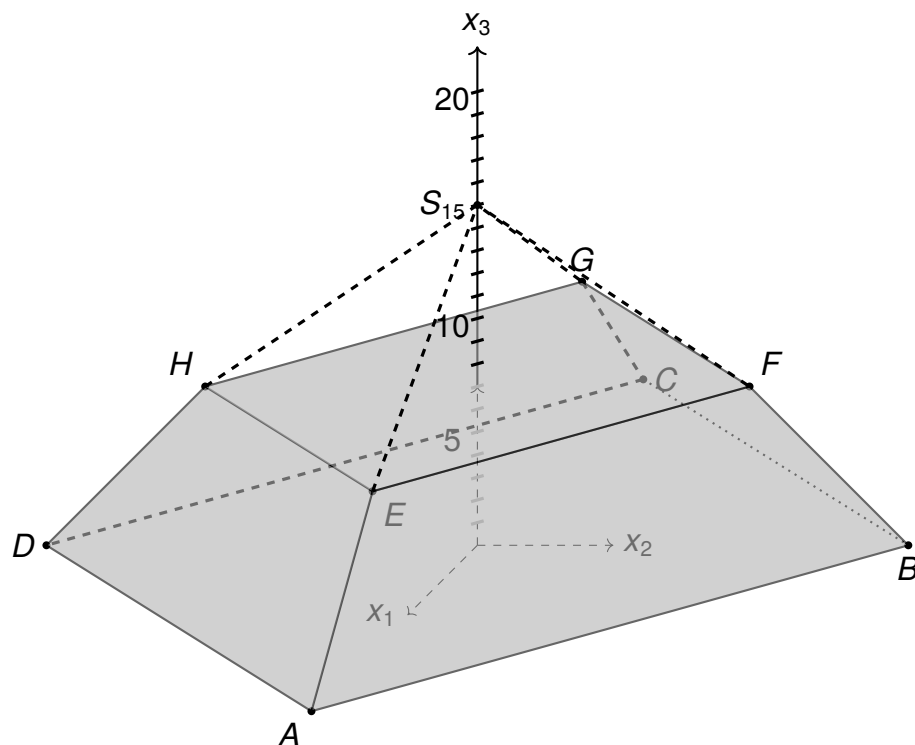
$$\begin{aligned} 0 &= 19 - 7r & | +7r \\ \Leftrightarrow 7r &= 19 & | \div 7 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{19}{7} \end{aligned}$$

Nun können wir die dritte Zeile nehmen, um  $k$  zu bestimmen:

$$r = \frac{19}{7} \text{ in III einsetzen: } k = 7 \cdot \overbrace{\frac{19}{7}}^r = 19$$

Damit ist  $S(0|0|19)$  die Spitze der Pyramide.

d) Wir tragen die Spitze der Pyramide mit  $S_{15} = (0|0|15)$  ein:



Da  $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$  ist, muss auch  $\frac{\overline{MS_{15}}}{\overline{MN}} < 1$  sein. Da die Strecken zudem immer positiv sind, gilt sogar

$$0 < \frac{\overline{MS_{15}}}{\overline{MN}} < 1.$$

Dieser Quotient ist aber gerade der Tangens des eingeschlossenen Winkels

$$\tan(\angle S_{15}NM) = \frac{\overline{MS_{15}}}{\overline{MN}}.$$

Also gilt für den Tangens  $\tan(\angle S_{15}NM) \in (0, 1)$ . Dies ist genau dann erfüllt, wenn  $\angle S_{15}NM \in (0, 45^\circ)$ . Somit muss der Winkel kleiner als  $45^\circ$  sein.

e) **Höhendifferenz:**

Eine Längeneinheit LE im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität. Mit der Spitze  $S_{19}$  beträgt die Pyramidenhöhe

$$h = 19 \text{ LE} = 19 \cdot 7 \text{ m} = 133 \text{ m}.$$

Mit der Spitze  $S_{15}$  beträgt die Pyramidenhöhe

$$h' = 15 \text{ LE} = 15 \cdot 7 \text{ m} = 105 \text{ m}.$$

Die Höhendifferenz beträgt somit

$$\Delta h = h - h' = 133 \text{ m} - 105 \text{ m} = 28 \text{ m}.$$

**Neigungswinkel:**

In Aufgabe d) wurde gezeigt, dass der obere Winkel kleiner als  $45^\circ$  ist.

In Aufgabe b) wurde gezeigt, dass der untere Winkel ungefähr  $55^\circ$  beträgt.

Somit haben die beiden Winkel einen Unterschied von über  $9^\circ$ .

- f) Die Sonnenstrahlen sind parallele Geraden mit Richtungsvektor  $\overrightarrow{S_{15}E}$ . Deshalb bestimmen wir zuerst den Richtungsvektor der Geraden:

$$\overrightarrow{S_{15}E} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Der Sonnenstrahl, der entlang der Kante  $\overrightarrow{S_{15}E}$  verläuft, wird durch

$$g_{\text{Licht}} : \vec{x} = \vec{s}_{15} + r \cdot \overrightarrow{S_{15}E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$



Vektoren  
beschreiben  
Lichtstrahlen

beschrieben. Der Schattenpunkt ist der Schnittpunkt zwischen der Geraden, die den Sonnenstrahl beschreibt und dem Boden (der  $x_1x_2$ -Ebene). In der  $x_1x_2$ -Ebene haben alle Punkte die Koordinate  $x_3 = 0$ . Somit gilt es die folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= 15 - 8r \quad | +8r \\ \Leftrightarrow 8r &= 15 \quad | \div 8 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Der Schattenpunkt ergibt sich, wenn wir  $r = 15/8$  in die Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{15}{8} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt ist somit  $T(22,5|0|0)$ .

- g) Da das Licht parallel einfällt und die Eckpunkte aller auf einer Höhe sind, haben die Eckpunkte und die Schattenpunkte alle denselben Abstand zueinander. Somit haben auch die Projektionen  $H', E'$  und  $F'$  denselben Abstand zu den jeweiligen Schattenpunkten. Der Abstand von  $E'$  und  $T$  sind 3,5 Kästchen senkrecht nach unten. Gehen wir von  $H'$  bzw.  $F'$  ebenfalls 3,5 Kästchen Richtung Süden, so erhalten wir die beiden anderen Schattenpunkte  $H''$  bzw.  $F''$ .

Die beiden Vierecke  $BATF''$  und  $DH''TA$  bilden zusammen den Schattenbereich. Die Kanten  $\overline{DA}$  und  $\overline{H''T}$  bzw.  $\overline{TF''}$  und  $\overline{AB}$  verlaufen jeweils parallel zueinander, sind aber ungleich lang. Die Kanten  $\overline{H''D}$  und  $\overline{TA}$  bzw.  $\overline{F''B}$  und  $\overline{TA}$  sind weder gleich lang, noch sind sie parallel. Damit haben beide Schattenvierecke zwei Seiten, die parallel zueinander verlaufen. Das macht die Schattenvierecke zu Trapezen.

