Gymnasium **Bayern**

Mathe Abitur
Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben
inkl. Lösungen & Lernvideos von

Daniel Jung

Jahr:
2024

StudyHelp

Mathe Abi Klausurenheft – Bayern

Prüfungsjahr 2024

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

1 Abi Klausur 2024

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: 70 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	1	a)	2	✓
		b)	3	
	2	a)	2	
		b)	3	
	3	a)	2	
		b)	3	
	4	a)	2	
		b)	3	
Stochastik	1	a)	3	
		b)	2	
Geometrie	1	a)	2	
		b)	3	

Analysis

Aufgabe 1:
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto 8x^3 + x$$

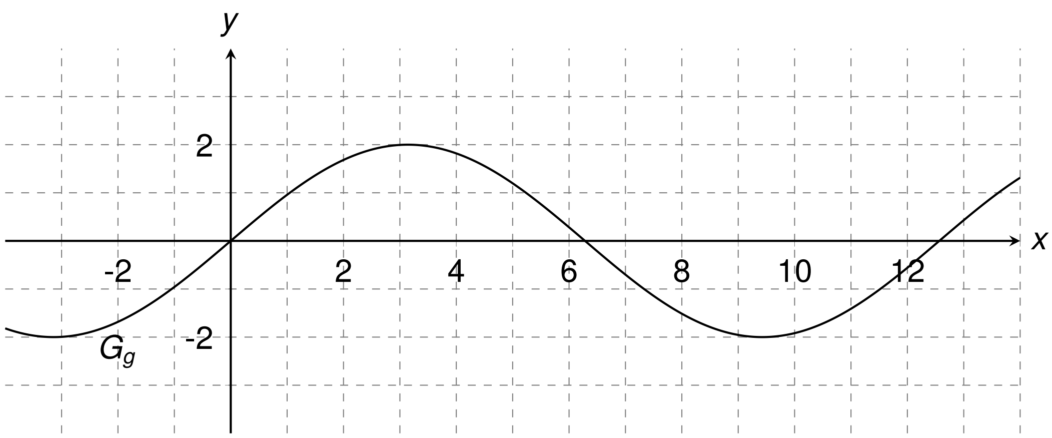
mit der Ableitungsfunktion f'.

a) Berechnen Sie $f'(1)$.

b) Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft.

Aufgabe 2:
Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = 2 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}x).$$



a) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals

$$\int_{-2}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$$

negativ ist.

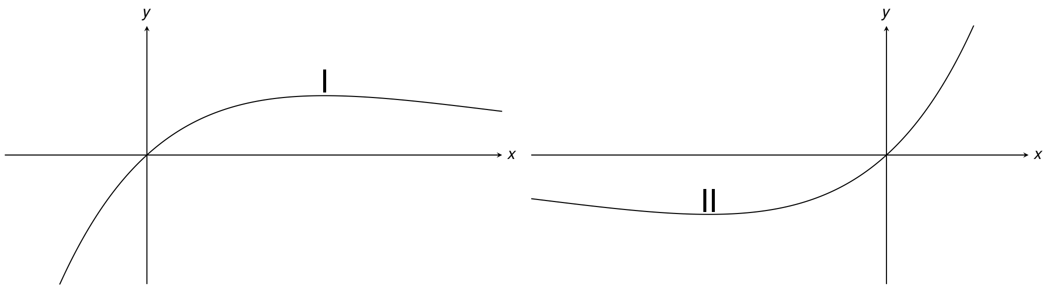
b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:

Die Tangente an G_g im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Aufgabe 3:
Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse läuft.

b) Die abgebildeten Graphen I und II sind Graphen der Schar; einer der beiden gehört zu einem positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 4:

a) Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g an, die den Wertebereich $[-2; 4]$ hat.

b) Geben Sie einen Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h an, sodass der Term

$$\sqrt{h(x)} \text{ genau für } x \in [-2; 4]$$

definiert ist.

Erläutern Sie die Ihrer Angabe zugrunde liegenden Überlegungen.

Stochastik

Aufgabe 1:
Bei einem Spiel wird ein Würfel einmal geworfen und ein Glücksrad einmal gedreht. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert. Das Glücksrad hat zehn gleich große Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Man gewinnt das Spiel, wenn die mit dem Glücksrad erzielte Zahl kleiner ist als die mit dem Würfel erzielte Zahl, andernfalls verliert man das Spiel.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das Spiel zu gewinnen, $\frac{1}{4}$ beträgt.

b) Das Spiel wird fünfmal gespielt. Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

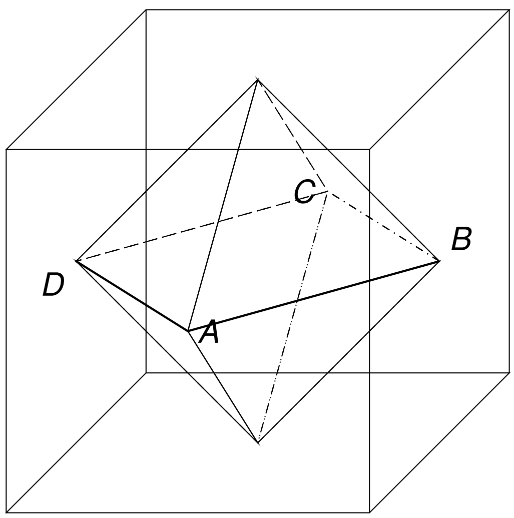
$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

berechnet werden kann.

Geometrie

Aufgabe 1:
Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1\,|\,2\,|\,1), B, C(-3\,|\,-6\,|\,9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0.$$



a) Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: 200 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

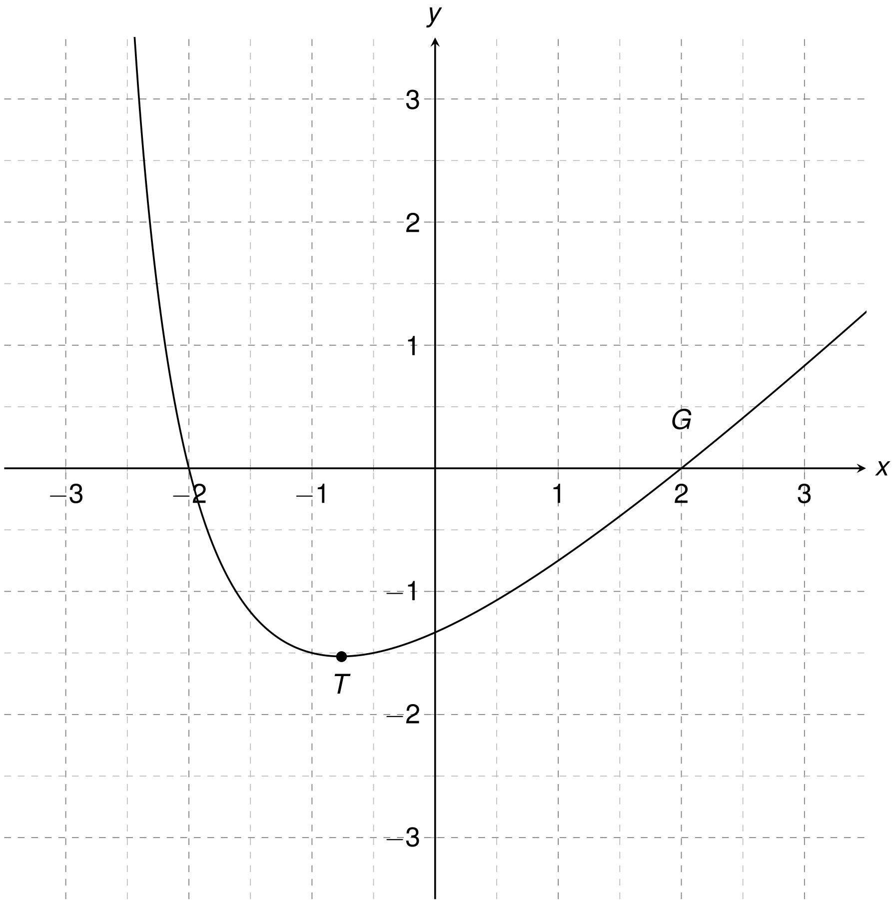
Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	1	a)	4	
		b)	3	
		c)	3	
		d)	5	
		e)	3	
		f)	6	
		g)	3	
	2	a)	4	
		b)	2	
		c)	3	
		d)	4	
Stochastik	1	a)	3	
		b)	3	
		c)	4	
		d)	5	
		e)	2	
		f)	4	
	2		4	
Geometrie	1	a)	3	
		b)	3	
		c)	4	
		d)	5	
		e)	3	
		f)	4	
		g)	3	

Analysis

Aufgabe 1: Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}.$$

G hat genau einen Tiefpunkt T.



a) Die Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $y = x - 3$ haben eine besondere Bedeutung für G. Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Abbildung ein und geben Sie diese Bedeutung an. Geben Sie zudem die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G mit der y-Achse. Begründen Sie anhand des gegebenen Terms von f, dass G für $x > -3$ oberhalb der Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ verläuft.

c) Weisen Sie nach, dass

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x+3}$$

gilt, indem Sie den Term $x - 3 + \frac{5}{x+3}$ geeignet umformen, und begründen Sie, dass f genau die Nullstellen -2 und 2 hat.

d) Ermitteln Sie rechnerisch einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f und berechnen Sie die x-Koordinate von T.

e) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Betrachtet wird die in $]-3;\infty[$ definierte Integralfunktion

$$J : x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

f) Begründen Sie, dass die in $]-3;\infty[$ definierte Funktion

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3)$$

für $x > -3$ eine Stammfunktion von f ist.

Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{x\to -3} J(x) = -\infty$$

gilt, und deuten Sie diese Aussage geometrisch.

g) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass J mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 2: Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ definierten Funktionen

$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x+3}$$

mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist somit die Funktion f_4 dieser Schar.

a) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k an und begründen Sie, dass die Funktion f_0 der Schar eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = \frac{x^2+6x+k}{(x+3)^2}$.

b) Begründen Sie, dass G_k für $k > 9$ keine Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an G_k im Punkt $(0|f_k(0))$ wird mit t_k bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass t_k die Steigung $\frac{k}{9}$ hat, und bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den t_k senkrecht zur Gerade mit der Gleichung $y = x - 3$ steht.

d) Geben Sie eine Gleichung von t_k an und beurteilen Sie folgende Aussage:

Es gibt einen Punkt, der für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ auf t_k liegt.

Stochastik

Aufgabe 1:
In den letzten Jahren hat der Onlinehandel stark zugenommen. Dies zeigt sich auch in den Versandzentren der Paketdienstleister. Im Folgenden werden nur die im Zusammenhang mit dem Onlinehandel verschickten Pakete in einem dieser Versandzentren betrachtet. Ein Fünftel dieser Pakete sind Retouren, d. h. Pakete, die zurückgeschickte Waren enthalten.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 200 zufällig ausgewählten Paketen mehr als ein Viertel Retouren sind.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term

$$1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{30}{i} \cdot 0{,}2^{i} \cdot 0{,}8^{30-i}$$

berechnet werden kann, und geben Sie dieses Ereignis an.

c) Ermitteln Sie, wie viele Pakete mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens eine Retoure ist, größer als 90 % ist.

d) 49 % der Pakete enthalten Kleidung. Von den Paketen, bei denen es sich um Retouren handelt, enthalten 91 % Kleidung. Es wird ein Paket zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

R: „Bei dem Paket handelt es sich um eine Retoure."

K: „Das Paket enthält Kleidung."

Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Bestimmen Sie für den Fall, dass das ausgewählte Paket keine Retoure ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Paket Kleidung enthält.

Aus einer Transportkiste mit 25 Paketen, unter denen sechs Retouren sind, werden nacheinander zehn Pakete zufällig entnommen und an eine Prüfstelle weitergeleitet.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten beiden Pakete Retouren sind.

f) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder drei Retouren entnommen werden.

Aufgabe 2:
Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X, die nur die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 annehmen kann.

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 4)$ und $P(X = 5)$ sowie der Erwartungswert und die Varianz von X sind bekannt. Aus diesen Informationen ergibt sich das folgende Gleichungssystem, mit dem die fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 berechnet werden können.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad p_1 + p_2 + p_3 &= 0{,}65 \\ \mathrm{II}: \quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 &= 1{,}45 \\ \mathrm{III}: \quad 4p_1 + p_2 &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Ermitteln Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, welche Werte für den Erwartungswert und die Varianz von X beim Aufstellen des Gleichungssystems verwendet worden sind.

Geometrie

Aufgabe 1:
Gegeben sind $A(8|0|6)$, $B(7|1|6)$ und $S(0|0|10)$, die in der Ebene E liegen.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AB]$ und geben Sie die besondere Lage dieser Strecke im Koordinatensystem an.

$\left[\text{zur Kontrolle: } \overline{AB} = \sqrt{2}\right]$

b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

[zur Kontrolle: $E : x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$]

Betrachtet werden die Schar der Geraden

$$g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$$

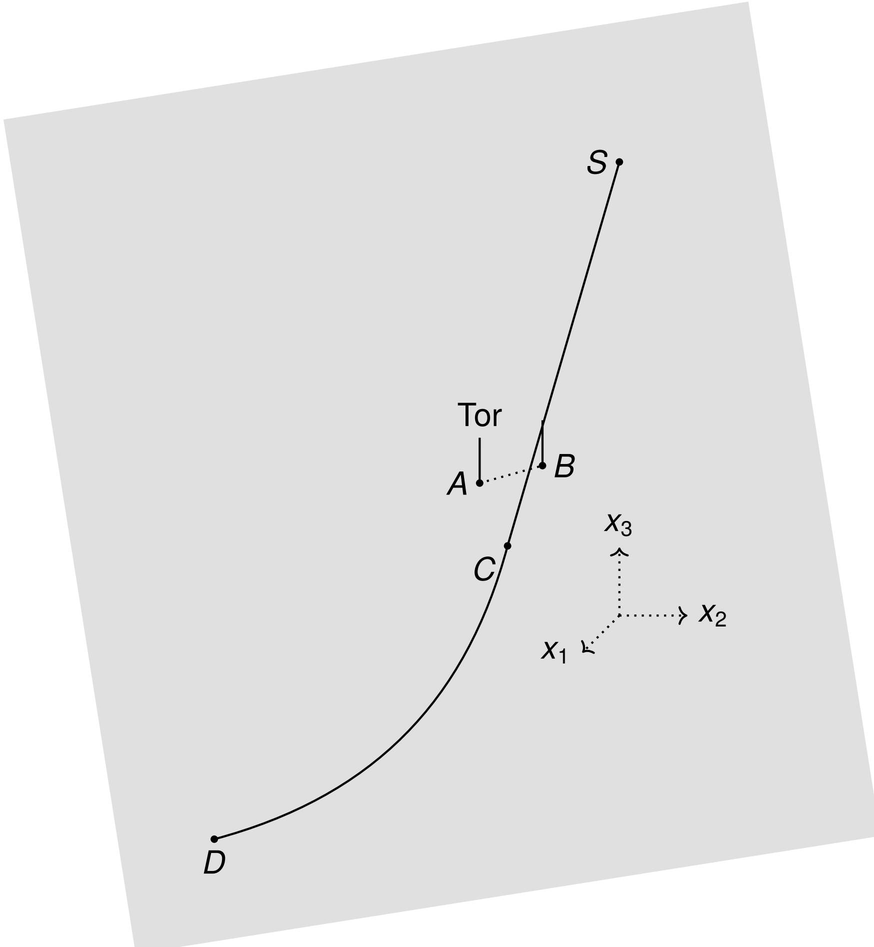
mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $C(9|1|5)$.

c) Begründen Sie, dass jede Gerade der Schar in E liegt, und bestimmen Sie denjenigen Wert k, für den der Punkt C auf g_k liegt.

[zur Kontrolle: $k = 0{,}8$]

d) Begründen Sie, dass die Größe des Schnittwinkels von g_k und der x_1x_2-Ebene weniger als 30° beträgt, wenn $2k^2 > 1$.

Eine Skifahrerin fährt einen Hang hinab. Dieser wird modellhaft durch ein Flächenstück beschrieben, das in der Ebene E liegt. Die Startposition der Abfahrt entspricht dem Punkt S. Auf dem Hang befindet sich ein Tor, dessen Begrenzungsstangen im Modell an den Punkten A und B stehen. Von ihrer Startposition fährt die Skifahrerin zunächst entlang einer geraden Fahrlinie bis zu einer Stelle unterhalb des Tors, die dem Punkt C entspricht (vgl. Abbildung).



Die gerade Fahrlinie liegt dabei im Modell auf der Gerade

$$g_{0,8} : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 5 Metern in der Realität.

e) Geben Sie mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe a) die Breite des Tors auf Meter genau an. Begründen Sie mithilfe der Aussage aus Aufgabe d), dass die gerade Fahrlinie der Skifahrerin um weniger als 30° gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

f) Begründen Sie rechnerisch, dass die Skifahrerin das Tor tatsächlich durchquert.

g) An der Stelle, die im Modell dem Punkt C entspricht, wird die Fahrlinie der Skifahrerin ohne Knick durch eine kreisbogenförmige Kurve fortgesetzt.

Während der Fahrt entlang dieser Kurve erreicht die Skifahrerin eine Stelle, die dem Punkt $D(18|-2|2)$ entspricht.

Der Kreisbogen, der diese Kurve beschreibt, ist Teil eines Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$. Die Koordinaten von M können mit folgendem Gleichungssystem ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0 \\
\text{II}: &\quad \begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
\text{III}: &\quad \sqrt{(m_1-9)^2 + (m_2-1)^2 + (m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2 + (m_2+2)^2 + (m_3-2)^2}
\end{aligned}$$

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die den Gleichungen I, II und III zugrunde liegen.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

Analysis

zu Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 8x^3 + 3x$.

a) Die Ableitung der Funktion $f'(x)$ berechnen wir mit Hilfe der Potenzregel:

Ableiten Potenzregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(8x^3 + 3x\right)' \\ &= 8 \cdot 3x^2 + 3 \\ &= 24x^2 + 3 \end{aligned}$$

Um den Wert der Ableitung (= Steigung) an der Stelle $x = 1$ zu bestimmen, setzen wir die Stelle ein und erhalten:

$$f'(1) = 24 \cdot 1^2 + 3 = 27.$$

Die Wert von f' an der Stelle $x = 1$ beträgt 27.

b) Die allgemeine Form der Stammfunktion von $f(x)$ ergibt sich zu

Integrieren Potenzregel

$$F(x) = \frac{8}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C = 2x^4 + 1{,}5x^2 + C.$$

Um die Stammfunktion zu finden, welche durch den Punkt $(-1|5)$ verläuft, setzen wir diesen Punkt in $F(x)$ ein und berechnen die Konstante C:

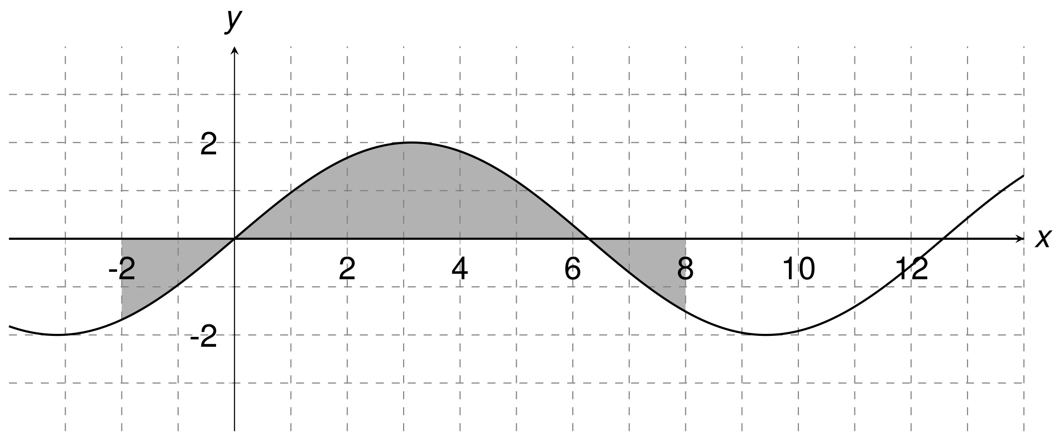
$$\begin{aligned} & 2 \cdot (-1)^4 + 1{,}5 \cdot (-1)^2 + C &= 5 & \\ \Leftrightarrow \quad & 3{,}5 + C &= 5 & \quad \mid -3{,}5 \\ \Leftrightarrow \quad & C &= 1{,}5 & \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Stammfunktion $F(x) = 2x^4 + 1{,}5x^2 + 1{,}5$.

zu Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

a) Wir sollen mithilfe der Abbildung beurteilen, ob das Integral im Bereich -2 bis 8 negativ ist und markieren die eingeschlossenen Flächen der Funktion und der x-Achse im zu untersuchenden Intervall.



Das Integral ist positiv, wenn die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse oberhalb der x-Achse größer ist als die Summe der beiden Flächenstücke unterhalb der x-Achse. Durch Kästchenzählen ergibt sich für die obere Fläche etwa 8 FE und für die Summe der unteren Flächenstücke etwa 3 FE.

Integralwert als Flächeninhalt

Da die obere Fläche überwiegt, ist das Integral positiv.

b) Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung von g an der Stelle $x = 0$. Wir berechnen die zunächst die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel

Ableiten Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \\ &= 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

und setzen $x = 0$ ein, um $g'(0) = \cos(0) = 1$ zu erhalten. Die Tangentengleichung lautet daher $t(x) = x$ und geht durch die Punkte $(1, 1)$ und $(-1, -1)$.

zu Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = xe^{ax}$.

Grenzwert-berechnung für e^x

a) Verhalten des Graphen für $x < 0$:

Da e^{ax} für $x < 0$ stets positiv ist, verläuft der Graph von $f(x)$ unterhalb der x-Achse, da x negativ wird.

b) Verhalten des Graphen für $a > 0$ bei $x \to \infty$:

Für $a > 0$ ergibt der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{ax}}_{\to\infty} = \infty.$$

Dies passt zu Graph 2, da dieser für große x-Werte keine waagrechte Asymptote besitzt, im Gegensatz zu Graph 1.

zu Aufgabe 4:

a) Da die Funktion in einem Bereich mit eingeschlossenen Grenzen verlaufen soll, bietet sich zum Beispiel eine Sinusfunktion an. Die reine Sinusfunktion hat den Wertebereich $W_{\sin} = [-1; 1]$. Somit hat das Intervall eine Länge von 2.

Um den Graphen passend zu gestalten, wird die Amplitude mit 3 multipliziert. $g(x) = 3\sin(x)$ hat den Wertebereich $W_1 = [-3; 3]$. Der Graph muss nun noch um 1 nach oben verschoben werden. Es ergibt sich:

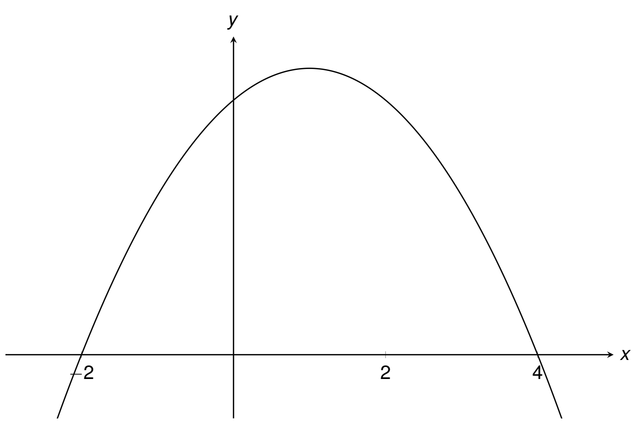
$$g(x) = 3\sin(x) + 1$$

Somit ist der Term einer gesuchten Funktion $3\sin(x) + 1$

b) Die Funktion $h(x)$ muss im Intervall $[-2; 4]$ immer positiv oder null sein und außerhalb negativ, da wir somit den Definitionsbereich auf $[-2; 4]$ beschränken. Eine geeignete Wahl ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$:

$$h(x) = -(x + 2)(x - 4)$$

So ist $h(x)$ auf dem gegebenen Intervall stets nicht-negativ und $\sqrt{h(x)}$ hat den Definitionsbereich $[-2; 4]$.



Stochastik

zu Aufgabe 1:
Betrachtet wird die Wahrscheinlichkeit für bestimmte Gewinnkonstellationen bei einem Spiel.

a) Ermittlung der Gewinnwahrscheinlichkeit:

Wir überlegen uns zunächst, welche Konstellationen führen zu einem Gewinn führen und fassen alles in einer Tabelle zusammen:

Würfel	Glücksrad
2	1
3	1, 2
4	1, 2, 3
5	1, 2, 3, 4
6	1, 2, 3, 4, 5

Die Tabelle zeigt, bei welchen Ergebnissen des Würfels und des Glücksrads ein Gewinn erzielt wird. Beispielsweise führt ein Würfelergebnis von 3 in Kombination mit den Glücksrad-Zahlen 1 oder 2 zu einem Gewinn, da beide Werte kleiner als 3 sind. Jede andere Glücksrad-Zahl wäre größer oder gleich 3 und man würde somit nicht gewinnen. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fälle ergibt dann die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinn.

Pfadregel

Jede Würfelseite hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und für k von 10 Möglichkeiten auf dem Glücksrad, haben wir die Wahrscheinlichkeit $\frac{k}{10}$. Es folgt:

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{10}$$

Zusammengefasst ergibt dies:

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{10} = \frac{1}{4}$$

b) Jedes Ereignis, bei dem zwei Spiele gewonnen und 3 Spiele verloren werden, würde hier passen. Aber Vorsicht, nicht das Ereignis „Genau zwei Spiele werden gewonnen“, da dies die Summe all dieser passenden Ereignisse wäre.

Binomialverteilung

Ein Beispiel für ein passendes Ereignis wäre somit:

A : „Genau die ersten beiden Spiele werden gewonnen.“

Geometrie

zu Aufgabe 1:

a) Um die Kantenlänge des Würfels zu bestimmen, nutzen wir die Information, dass A und C Mittelpunkte der jeweiligen Seitenflächen sind. Die Kantenlänge entspricht somit dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AC}$.

Richtungsvektor

Zunächst berechnen wir den Vektor $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ -6-2 \\ 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die Kantenlänge ergibt sich dann aus dem Betrag dieses Vektors:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

Länge eines Vektors

b) Um die Koordinaten der Spitze F des Oktaeders zu bestimmen, gehen wir in mehreren Schritten vor:

1) Wir starten am Punkt A,
2) tragen den halben Vektor $\overrightarrow{AC}$ an und
3) gehen dann entlang des Normalenvektors der Ebene H um 6 Längeneinheiten nach oben.

Zunächst bestimmen wir die Länge des Normalenvektors (können wir einfach an der Koordinatenform ablesen) der Ebene H:

Normalenvektor

$$|\vec{n}_H| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Da der Normalenvektor die Länge 3 LE hat, benötigen wir diesen Vektor zweimal. Nun können wir die Koordinaten von F berechnen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Somit liegt der Punkt F bei $F(3 \mid 0 \mid 9)$.

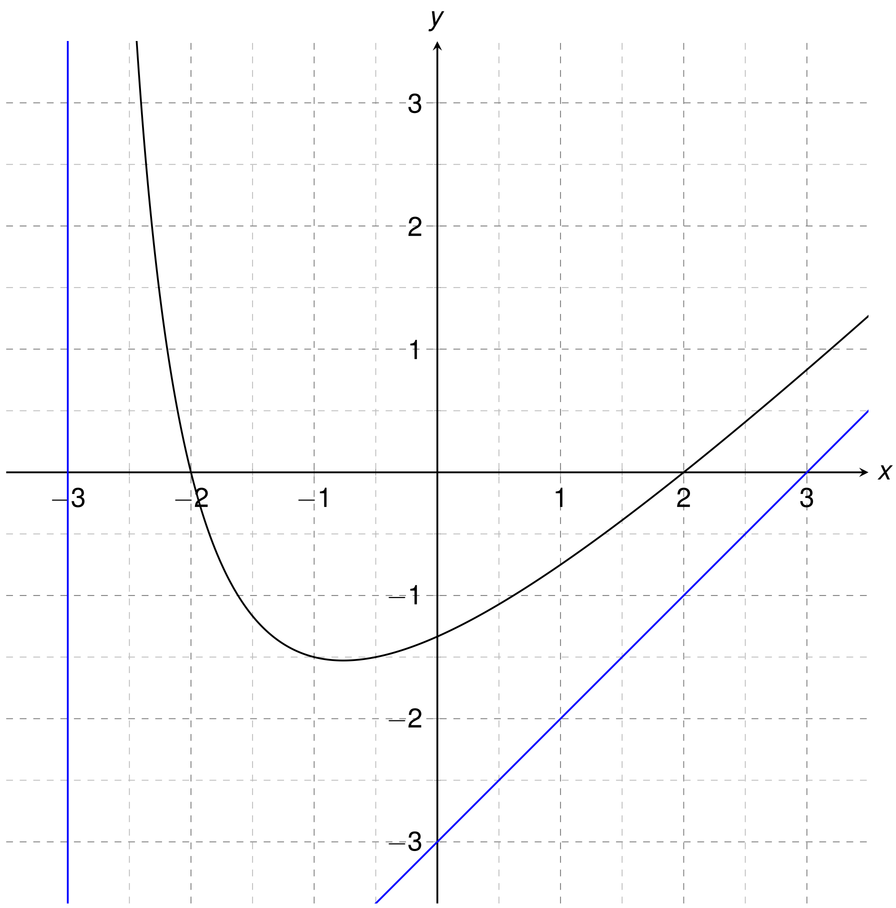
1.2.2 Prüfungsteil B

Analysis

zu Aufgabe 1:

Asymptoten gebrochen-rationaler Funktionen

a) Wir zeichnen die beiden Geraden zunächst in das Koordinatensystem ein. Die Gerade $x = 3$ beschreibt die senkrechte Asymptote an der Definitionslücke von $f(x)$ und die Gerade $y = x - 3$ beschreibt die schräge Asymptote für $x \to \pm\infty$.



Da für die senkrechte Asymptote nur $x = -3$ sein kann, setzen wir diesen Wert für x in die schräge Asymptote ein. Daraus folgt:

$$y(-3) = -3 - 3 = -6$$

Somit sind die Koordinaten des Schnittpunktes $S(-3 \mid -6)$.

b) Auf der y-Achse haben alle Punkte die x-Koordinate 0. Daher setzen wir $x = 0$ in die Funktion ein und erhalten:

$$f(0) = 0 - 3 + \frac{5}{0+3} = -\frac{4}{3}$$

Also ist $S_y\left(0 \mid -\frac{4}{3}\right)$.

Solange $x > -3$ gilt, ist $x + 3 > 0$ und somit der Restterm $\frac{5}{x+3} > 0$. Der Graph verläuft oberhalb seiner schrägen Asymptote, wenn der Restterm positiv ist.

c) Um die Nullstellen zu finden, bringen wir zunächst den Term auf einen gemeinsamen Nenner:

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 3 + \frac{5}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)+5}{x+3} = \frac{x^2-9+5}{x+3} \\ &= \frac{x^2-4}{x+3} \end{aligned}$$

Die Nullstellen ergeben sich aus dem Zähler:

$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 &= 0 \qquad |+4 \\ \Leftrightarrow \qquad x^2 &= 4 \qquad |\sqrt{\dots} \\ \Rightarrow \qquad x_{1/2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

d) Um die x-Koordinate des Tiefpunkts zu bestimmen, leiten wir $f(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel ab:

Ableiten Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-4}{x+3}\right)' \\ &= \frac{(x+3)\cdot 2x - (x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+4}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

Hinweis: Es kann genauso gut der ursprüngliche Term abgeleitet werden.

Der x-Koordinate des Tiefpunktes ist die Nullstelle der Ableitung. Die Nullstellen ergeben sich wieder aus dem Zähler:

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow x^2 + 6x + 4 = 0$$

Mit Hilfe der pq-Formel erhalten wir:

pq-Formel

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 4} \\ &= -3 \pm \sqrt{9-4} \\ &= -3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Aus dem gegebenen Graphen ergibt sich, dass zum Tiefpunkt der größere Wert gehört: $x_T = -3 + \sqrt{5}$.

e) Der Betrag des Integrals entspricht der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ einschließen. Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert negativ. Da nur ein Näherungswert gesucht ist, sind die Kästchen zu zählen.

Integralwert als Flächeninhalt

Es ergibt sich:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx -4$$

f) Für das Flächenstück zwischen Graph, x-Achse und senkrechter Asymptote betrachten wir:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3)$$

Außerdem ist

$$J(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

jeweils für $x > -3$. Ob $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ für $x > -3$ ist, zeigen wir durch ableiten:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3)\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x - 3 + \frac{5}{x+3} \\ &= x - 3 + \frac{5}{x+3} = f(x) \end{aligned}$$

Folglich ist F eine Stammfunktion von f für $x > -3$.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-3} J(x) &= \lim_{x\to-3} \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to-3} (F(x) - F(-2)) \\ &= \lim_{x\to-3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3) - \left[\frac{1}{2}\cdot 4 - 3(-2) + 5\ln 1\right]\right) \\ &= \lim_{x\to-3} \left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2 - 3x}_{\to 3,5} + \underbrace{5\ln\Big(\underbrace{x+3}_{\to 0^+}\Big)}_{\to -\infty} - 8\right) \\ &\to -\infty \end{aligned}$$

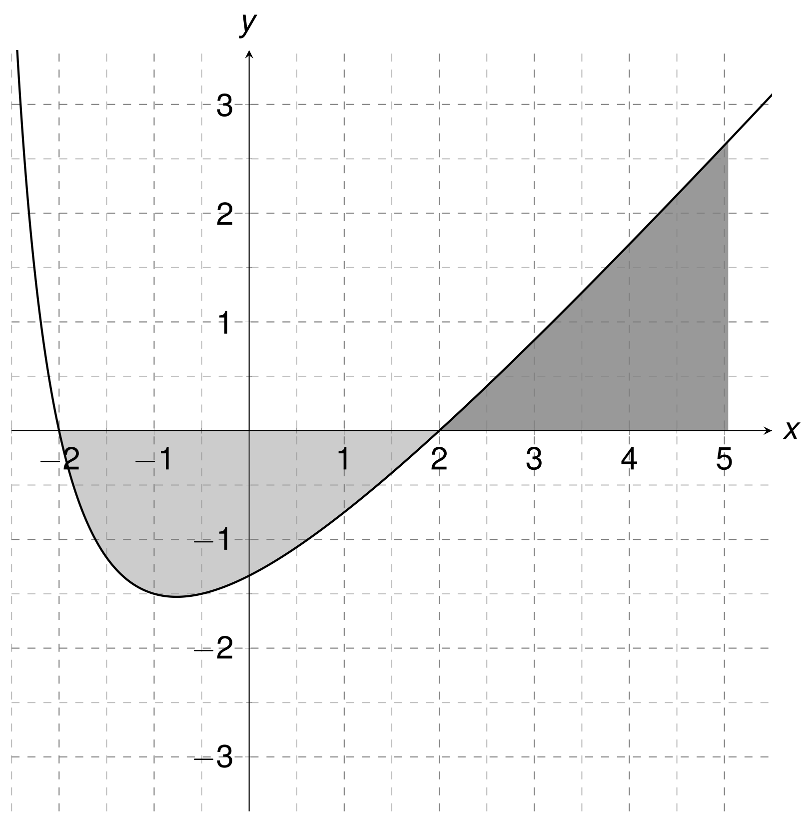
Die Fläche, die von dem Graphen von f, der x-Achse und der Gerade $x = -3$ im II. Quadranten eingeschlossen wird, ist daher nicht endlich.

g) Nullstellen von J:

1) Das Integral beschreibt die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse, in einem Intervall definiert durch die Grenzen des Integrals. Sind die Grenzen gleich, existiert keine Fläche und somit ist das Integral automatisch 0 und wir finden daher bei $x = -2$ die erste Nullstelle.

Integralwert gleich 0

2) Eine weitere Nullstelle gibt es, wenn sich im Integrationsintervall Flächenstücke unter- und oberhalb der x-Achse gegenseitig aufheben. Da die Fläche unterhalb der x-Achse für $-2 \leq x \leq 2$ etwa 4 beträgt (siehe Aufgabenteil e) und die Fläche oberhalb der x-Achse für ein größer werdendes $x > 2$ stetig zunimmt und ins unendliche strebt, gibt es eine weitere Stelle für $x > 2$, an der $J(x) \approx 4$ gilt. Somit gibt es insgesamt mindestens zwei Nullstellen von J.



zu Aufgabe 2: Wir betrachten die Schar:

$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x + 3}, \text{ mit } x \neq -3 \text{ und } k \neq 9$$

Es gilt zudem $f(x) = f_4(x)$.

a) Die Nullstellen ergeben sich erneut aus den Nullstellen des Zählers:

Nullstellen

$$\begin{aligned} f(x) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x^2 - k &= 0 \qquad |+k \\ \Leftrightarrow\; x^2 &= k \qquad |\sqrt{\cdots} \\ \Rightarrow\; x_{1/2} &= \pm\sqrt{k} \end{aligned}$$

Für $k > 0$ gibt es genau zwei (einfache) Nullstellen, für $k = 0$ eine doppelte (also ohne Vorzeichenwechsel) und für $k < 0$ keine Nullstelle.

b) Mit Hilfe der Quotientenregel erhalten wir die Ableitung:

Ableiten Quotienten-regel

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \left(\frac{x^2 - k}{x + 3}\right)' = \frac{(x+3) \cdot 2x - (x^2 - k) \cdot 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2 + 6x + k}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

G_k hat keinen Extrempunkt, wenn die Ableitung und somit deren Zähler nicht null werden kann. Wir setzen den Zähler gleich null

$$f_k'(x) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow x^2 + 6x + k = 0$$

und erhalten mit Hilfe der pq-Formel:

pq-Formel

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - k} \\ &= -3 \pm \sqrt{9 - k} \end{aligned}$$

Für $9 - k < 0$ bzw. $k > 9$ hat die Gleichung keine Lösung und G_k somit keinen Extrempunkt.

c) Die Steigung der Tangente t_k an G_k im Punkt $P(0 \mid f_k(0))$ hat die Steigung des Graphen in dem Punkt. Somit bestimmen wir $f_k\prime(0)$ um die Steigung von t_k zu erhalten. Die Ableitung haben wir bereits in b) bestimmt. Es gilt:

Tangenten-gleichung

$$f_k'(0) = \frac{0 + k}{(3)^2} = \frac{k}{9}$$

Wenn zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen, ergibt das Produkt ihrer Steigungen -1. Die schräge Asymptote hat die Steigung 1:

$$\begin{aligned} \frac{k}{9} \cdot 1 &= -1 \qquad | \cdot 9 \\ \Rightarrow\; k &= -9 \end{aligned}$$

d) Für die Tangentengleichung fehlt noch der y-Wert des Punktes:

$$f_k(0) = \frac{0-k}{0+3} = -\frac{k}{3}$$

Der Punkt und die Steigung in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt, ergibt:

$$t_k(x) = \frac{k}{9}x - \frac{k}{3}$$

Den gemeinsamen Punkt zweier Tangenten erhalten wir durch Gleichsetzen der Funktionen:

$$\begin{aligned} t_{k_1}(x) = t_{k_2}(x) \;\Rightarrow \quad \frac{k_1}{9}x - \frac{k_1}{3} &= \frac{k_2}{9}x - \frac{k_2}{3} \\ \Leftrightarrow \quad k_1\left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}\right) &= k_2\left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer ihrer Faktoren 0 ergibt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{9}x - \tfrac{1}{3} &= 0 \quad \left| +\tfrac{1}{3} \right. \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{9}x &= \tfrac{1}{3} \quad | \cdot 9 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Der Punkt $(3 \,|\, 0)$ liegt also auf allen Tangenten t_k.

Stochastik

zu Aufgabe 1:

a) Wir können die kumulierte Binomialverteilung nutzen, da wir als Ereignisse Retoure und keine Retoure haben, mit $n = 200$, $p = P(\text{„Retoure“}) = 0{,}2$.

Kumulierte Binomialverteilung

Mehr als ein Viertel heißt mehr als $\frac{1}{4} \cdot 200 = 50$.

$$\begin{aligned} P(X > 50) &= P(X \geq 51) \\ &= 1 - P(X \leq 50) \\ &= 1 - \textstyle\sum_{i=0}^{50} B(200; 0{,}2; i) \\ &= 1 - 0{,}96550 = 0{,}0345 = 3{,}45\% \end{aligned}$$

b) Der Term

$$1 - \sum_{i=0}^{8} \binom{30}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{30-i}$$

lässt sich analog zu a) interpretieren:

Zufallsexperiment: Es werden 30 Pakete zufällig ausgewählt.

Ereignis: „Unter 30 Paketen sind mehr als acht Retouren.“

c) Das ist eine 3-mal-mindestens-Aufgabe, mit $P(\text{„Retoure“}) = 0{,}2$:

3x mind. Aufgabe

$$\begin{aligned} & P(X \geq 1) &>\ & 0{,}9 \\ \Rightarrow\ & P(X = 0) &<\ & 0{,}1 \\ \Rightarrow\ & \tbinom{n}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^n &<\ & 0{,}1 && |\ \ln(\ldots) \\ \Rightarrow\ & n \cdot \ln 0{,}8 &<\ & \ln 0{,}1 && |\ \div \ln 0{,}8 \\ \Rightarrow\ & n &>\ & \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \\ \Rightarrow\ & n &>\ & 10{,}3188\ldots \end{aligned}$$

Somit müssen mindestens 11 Pakete ausgewählt werden.

d) Wir kennen die Wahrscheinlichkeit für ein Paket das Kleidung enthält $P(K) = 0{,}49$ und wir wissen die Wahrscheinlichkeit für eine Retoure $P(R) = 0{,}2$. Mit $P(K \cap R)$ können wir die Vierfeldertafel aufstellen. Wir wissen:

Vierfeldertafel

$$\begin{aligned} & P_R(K) &=\ & 0{,}91 \\ \Rightarrow\ & \frac{P(K \cap R)}{P(R)} &=\ & 0{,}91 \\ \Rightarrow\ & \tfrac{P(K \cap R)}{0{,}2} &=\ & 0{,}91 && |\cdot 0{,}2 \\ \Rightarrow\ & P(K \cap R) &=\ & 0{,}182 \end{aligned}$$

Bekannte Größen sind grün gedruckt:

	R	$\overline{R}$	
K	0,182	0,308	0,49
$\overline{K}$	0,018	0,492	0,51
	0,2	0,8	1

Daraus folgt:

$$P_{\overline{R}}(K) = \frac{P(\overline{R} \cap K)}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}308}{0{,}8} = 0{,}385 = 38{,}5\%$$

e) Das gesuchte Ereignis ist zu vergleichen mit „Nacheinander Ziehen ohne Zurücklegen“.

E: „Die ersten beiden Pakete sind Retouren.“

$$P(E) = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

f) Wir nutzen die hypergeometrische Verteilung mit $N = 25$ Kisten, $M = 6$ Retouren und entweder $k = 2$ oder $k = 3$ entnommenen Retouren. Also:

$$P(E) = P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{19}{8} + \binom{6}{3} \cdot \binom{19}{7}}{\binom{25}{10}}$$
$$= 0{,}65514 \approx 65{,}5\%$$

Hyper- geometrische Verteilung

zu Aufgabe 2: Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	1	2	3	4	5
$P(X = p)$	p_1	p_2	p_3	0,2	0,15

und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad p_1 + p_2 + p_3 &= 0{,}65 \\ \text{II:} \quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 &= 1{,}45 \\ \text{III:} \quad 4p_1 + p_2 &= 0{,}6 \end{aligned}$$

mit der fehlende Wahrscheinlichkeit bestimmt werden können.

Aus der Gleichung II lässt sich der Erwartungswert schlussfolgern, mit:

Erwartungs-
wert

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}15$$

Setzen wir die zweite Gleichung ein, erhalten wir:

$$E(X) = 1{,}45 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}15 = 3$$

Für diskrete Zufallsvariablen lässt sich die Varianz über

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i \\ &= (-2)^2 p_1 + (-1)^2 p_2 + 0^2 p_3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}15 \\ &= 4p_1 + p_2 + 0{,}8 \end{aligned}$$

berechnen. Der Anteil des Terms mit den unbekannten Wahrscheinlichkeiten entspricht der linken Seite von Gleichung III. Wir können diese Gleichung also hier einsetzen:

$$Var(X) = 0{,}6 + 0{,}8 = 1{,}4$$

Zur Kontrolle können wir das Gleichungssystem lösen. Die dritte Gleichung umgeformt nach p_2 ergibt:

$$p_2 = 0{,}6 - 4p_1$$

Diese Gleichung eingesetzt in I ergibt:

$$\begin{array}{rrcll} & p_1 + (0{,}6 - 4p_1) + p_3 & = & 0{,}65 & \\ \Rightarrow & -3p_1 + 0{,}6 + p_3 & = & 0{,}65 & \mid -0{,}6 \mid +3p_1 \\ \Rightarrow & p_3 & = & 0{,}05 + 3p_1 & \end{array}$$

Und eingesetzt in die II. Gleichung:

$$\begin{array}{rrcll} & p_1 + 2(0{,}6 - 4p_1) + 3(0{,}05 + 3p_1) & = & 1{,}45 & \\ \Rightarrow & p_1 + 1{,}2 - 8p_1 + 0{,}15 + 9p_1 & = & 1{,}45 & \\ \Rightarrow & 2p_1 + 1{,}35 & = & 0{,}145 & \mid -1{,}35 \\ \Rightarrow & 2p_1 & = & 0{,}1 & \mid \div 2 \\ \Rightarrow & p_1 & = & 0{,}05 & \end{array}$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{array}{rclcl} p_2 & = & 0{,}6 - 4 \cdot 0{,}05 & = & 0{,}4 \\ p_3 & = & 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}05 & = & 0{,}2 \end{array}$$

Eingesetzt in die Formel des Erwartungswertes erhalten wir:

$$E(X) = 1 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}15 = 3$$

und

$$Var(X) = 1^2 \cdot 0{,}05 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}15 - 3^2 = 1{,}4$$

Geometrie

zu Aufgabe 1:

$A(8\,|\,0\,|\,6), B(7\,|\,1\,|\,6), S(0\,|\,0\,|\,10)$

a) Zunächst berechnen wir den Vektor $\overrightarrow{AB}$:

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 1-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge ergibt sich dann aus dem Betrag dieses Vektors:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Da A und B die gleiche x_3-Koordinate haben, ändert sich die x_3-Koordinate entlang der Strecke $[AB]$ nicht und somit ist die Strecke parallel zur x_1x_2-Ebene.

b) Für die Ebenengleichung bietet sich A als Aufpunkt an, da wir $\overrightarrow{AB}$ bereits berechnet haben. Wir bestimmen noch $\overrightarrow{AS}$ als weiteren Spannvektor:

Koordinatenform mit Normalenvektor

$$\overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinatenform bilden wir das Kreuzprodukt der beiden gekürzten Richtungsvektoren:

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - 0 \\ 0 - (-1)\cdot(-1) \\ 0 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}_E$$

Die Werte des Normalenvektors bilden die Koeffizienten der Koordinatenform.

$$E: x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$$

Nun müssen wir lediglich einen Punkt der Ebene einsetzen, um die Konstante zu bestimmen. Einsetzen von A:

$$\begin{aligned} & 8 + 0 + 2\cdot 6 + c &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c &= -20 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 20 = 0$$

c) Wir können aus jeder Koordinate der Geradenschar

$$g_k : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}; \quad C(9\,|\,1\,|\,5)$$

eine Gleichung gewinnen und diese Gleichungen in unsere zuvor gefundene Koordinatenform einsetzen. Wenn für alle $\lambda, k \in \mathbb{R}$ die Gleichung erfüllt wird, liegen alle Geraden der Schar innerhalb der Ebene.

$$(0 + \lambda(1 + k)) + (0 + \lambda(1 - k)) + 2(10 - \lambda) - 20 = 0$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda k + \lambda - \lambda k + 20 - 2\lambda - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &= 0. \end{aligned}$$

Da 0 = 0 eine wahre Aussage ist, egal für welche Wahl der Parameter, muss jede Gerade der Schar innerhalb der Ebene liegen.

Außerdem soll C auf einer der Geraden liegen. Wir setzen die allgemeine Form der Schar mit dem Punkt gleich:

Punktprobe

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jede Koordinate liefert wieder eine Gleichung:

$$\begin{array}{rrcll} \text{I} & 9 & = & \lambda(1+k) & \\ \text{II} & 1 & = & \lambda(1-k) & \\ \text{III} & 5 & = & 10 - \lambda & \Leftrightarrow \lambda = 5 \end{array}$$

Die dritte Gleichung lässt sich direkt nach λ umstellen:

$$\lambda = 5$$

Dies lässt sich nun in die anderen beiden Gleichungen einsetzen:

$$\begin{array}{rrclclcl} \text{in I:} & 9 & = & 5(1+k) & = & 5 + 5k & \Leftrightarrow & k = 0{,}8 \\ \text{in II:} & 1 & = & 5(1-k) & = & 5 - 5k & \Leftrightarrow & k = 0{,}8 \end{array}$$

Da ein einheitliches k resultiert, gibt es eine Gerade auf der der Punkt C liegt, nämlich die Gerade $g_{0,8}$.

d) Es soll gelten: $2k^2 > 1$

Der Winkel zwischen der Gerade und der x_1x_2-Ebene ergibt sich, wenn wir den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Gerade und dem Normalenvektor der Ebene berechnen und diesen von 90° abziehen:

Winkel Gerade <> Ebene

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{(1+k)^2 + (1-k)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 + 2k + k^2 + 1 - 2k + k^2 + 1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2k^2 + 3}}$$

Aufgrund der Beziehung zwischen Sinus und Kosinus und der Achsensymmetrie des Kosinus und der Punktsymmetrie des Sinus folgt die Beziehung

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin(\varphi) \overset{P.S.}{=} -\sin(-\varphi)$$
$$-\sin(-\varphi) = -\cos(-(90^\circ - \varphi)) \overset{A.S.}{=} -\cos(90^\circ - \varphi)$$

und damit dann auch:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 3}}$$

Wegen $2k^2 > 1$ gilt:

$$\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{2k^2}_{>1} + 3}}_{>2}} < \frac{1}{2}$$

Nun folgt aus:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} \Rightarrow 90^\circ - \varphi = 60^\circ \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

In dem Bereich $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ mit steigendem Winkel monoton fallend. Also muss der Winkel vom Kosinus größer als 60° sein. Also:

$$90^\circ - \varphi > 60^\circ \Rightarrow \varphi < 30^\circ$$

Der Winkel zwischen jeder Gerade und der x_1x_2-Ebene ist daher immer kleiner als 30°, wenn $2k^2 > 1$ gilt.

e) Wir wissen aus der a) bereits, dass $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ LE. Da eine Längeneinheit 5 Metern entspricht, ist das Tor

$$\sqrt{2} \cdot 5\text{m} \approx 7\text{m}$$

breit.

Aus der d) wiederum wissen wir, dass der Winkel zwischen der Gerade und der x_1x_2-Ebene kleiner als 30° ist, wenn gilt $2k^2 > 1$. Für $k = 0{,}8$ folgt:

$$2 \cdot 0{,}8^2 = 1{,}28 > 1$$

Damit ist der Winkel kleiner als 30°.

f) Die Skifahrerin durchquert das Tor, wenn die Gerade AB die Gerade $g_{0,8}$ zwischen A und B schneidet. Es gilt

$$g_{0,8} : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für die Gerade AB:

$$\vec{X} = \vec{a} + \mu \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte 2er Geraden

Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrcl} \text{I:} & 8 - \mu & = & \lambda \cdot 1{,}8 \\ \text{II:} & \mu & = & \lambda \cdot 0{,}2 \\ \text{III:} & 6 & = & 10 - \lambda \end{array}$$

Aus Gleichung III folgt durch umstellen sofort:

$$\lambda = 4$$

Eingesetzt in die anderen beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{array}{rrcccl} \text{in I:} & 8 - \mu & = & 1{,}8 \cdot 4 & \Leftrightarrow & \mu = 0{,}8 \\ \text{in II:} & \mu & = & 0{,}2 \cdot 4 & = & 0{,}8 \end{array}$$

Die beiden Geraden schneiden sich also.

Für den Schnittpunkt P gilt:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 0{,}8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

P hat die gleiche x_3-Koordinate wie A und B. Die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate liegen jeweils zwischen den entsprechenden Koordinaten von A und B. Die Gerade AB schneidet die Gerade $g_{0,8}$ also zwischen A und B.

Die Skifahrerin durchquert also das Tor.

g) • I:

$$m_1 + m_2 + 2m_3 - 20 = 0$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man M in die Ebene E einsetzt. M liegt daher in E.

• II:

$$\begin{pmatrix} m_1 - 9 \\ m_2 - 1 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Das Skalarprodukt aus dem Vektor $\overrightarrow{CM}$ und dem Richtungsvektor von $g_{0,8}$ ist null. Daher stehen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht. Der Kreisbogen berührt die Gerade also in C.

• III:

$$\sqrt{(m_1-9)^2+(m_2-1)^2+(m_3-5)^2} = \sqrt{(m_1-18)^2+(m_2+2)^2+(m_3-2)^2}$$
$$\Longrightarrow \; |\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{DM}|$$

C und D liegen also auf dem Kreisbogen um M.